НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ СЖИМАЕМОЙ ПЛАЗМЕ

В. М. Кормилец, И. П. Якименко

Харьков

Случай нелинейного взаимодействия волн в приближении заданного поля для холодного плазменного цилиндра исследовался ранее [1]. В настоящее время интересно рассмотреть вопрос о нелинейном взаимодействии волн в горячем плазменном волноводе, что соответствует учету пространственной дисперсии в квазигидродинамическом приближении. Нелинейные токи и заряды, возникающие при нелинейном взаимодействии волн, играют роль индуцированных электромагнитных флуктуаций [2—4]. Среди многообразия нелинейных эффектов можно выделить «переизлучение», рассеяние и трансформацию волн на нелинейных токах и зарядах. Задача переизлучения ставится как краевая задача электродинамики с заданным сторонним током, роль которого играют нелинейные токи, возникающие при взаимодействии некоторого набора волн. Задача рассеяния и трансформации волн на нелинейных токах ставится и решается с учетом особенностей теории молекулярного рассеяния в ограниченной среде [5].

В настоящей работе в гидродинамическом приближении выведено координатное представление нелинейного тока взаимодействия двух волн. Переизлученное поле, вызванное этим током, получено на основании теоремы взаимности и метода функций Грина. Рассмотрен частный случай нелинейного взаимодействия E-волн, распространяющихся в горячем плазменном цилиндре с разреженной плазмой.

Постановка граничной задачи в приближении заданного поля

Для решения граничной задачи переизлучения необходимо координатное представление токов и зарядов, которые возникают при нелинейном взаимодействии волн, распространяющихся внутри плазменного объема. Назовем эти волны первичными. Их поля являются результатом решения дифракционной задачи для данного тела. Если электромагнитная волна падает из окружающего пространства на ограниченное плазменное тело, первичное поле внутри объема вследствие конверсии на границе является суммой обычного электромагнитного (поперечного) и электроакустического (продольного) полей. Для анализа электроакустических волн необходимо использовать кинетическое описание или, по крайней мере, гидродинамическое описание с учетом газокинетического давления. В настоящей работе при анализе переизлученного поля и токов, обусловивших это поле, использована вторая возможность.

Ограничимся случаем достаточно высоких частот, когда можно не учитывать движение ионов, и пренебрегая наличием соударений электронов с другими частицами рассмотрим бесконечно длинный плазменный цилиндр, характеризующийся следующими равновесными параметрами: концентрация электронов — n_0, давление — P_0, температура в энергетических единицах — T_0, тепловая скорость электронов $S^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma T_0}{m}$, γ — показатель адиабаты, $\rho_0 = mn_0$ — плотность электронов, m — масса электрона.

Исходя из нелинейной системы гидродинамических уравнений движения, уравнений Максвелла, состояния, непрерывности и условия адиабатичности процесса и пренебрегая членами более высокого порядка малости, для компонент Фурье по времени первичного и рассеянного полей внутри плазменного объема получаем следующие соотношения:

№ п/п	Наименование уравнений	Первичное поле	Рассеянное поле
1	Уравнения Максвелла	$\operatorname{rot} \vec{E}_i = ik_i \vec{H}_i$; $\operatorname{rot} \vec{H}_i = -ik_i E_i - \frac{4\pi}{c} en_0 \vec{v}$;	$\operatorname{rot} \vec{E} = ik_0 \vec{H}$; $\operatorname{rot} \vec{H} = -ik_0 \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{I}$; (1)
2	Уравнение непрерывности	$-i\omega_i n_i + n_0 \operatorname{div} \vec{v}_i = 0$;	$-i\omega n + \operatorname{div} (n_1 \vec{v}_2 + n_2 \vec{v}_1) + n_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0$; (2)
3	Уравнение состояния	$P_i = n_i T_0 + n_0 T_i$;	$P = n_1 T_2 + n_2 T_1 + n T_0 + n_0 T$; (3)
4	Условие адиабатичности	$P_i = ms^2 n_i$;	$P = ms^2 n + \gamma (n_1 T_2)$; (4)
5	Уравнение движения	$\vec{v}_i = \frac{-ie}{m\omega_i}\left(\vec{E}_i + \frac{1}{en_0} \nabla P_i\right)$.	$\vec{v} = -\frac{ie}{m\omega}\left[\vec{E} + \frac{1}{en_0} \nabla P + \frac{m}{e} \nabla (\vec{v}_1 \vec{v}_2) - \frac{ms^2}{en_0^2} \nabla (n_1 n_2)\right]$. (5)

Индекс i соответствует первой и второй первичным волнам ($i = 1, 2$) n_i; $P_i T_i$ — изменение концентрации, давления и температуры соответственно для i-й волны; $k_i = \frac{\omega_i}{c}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$ — волновые числа первичного и рассеянного полей (временный множитель $\exp(-i\omega_i t)$ и $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен); n, P, T — изменение концентрации, давления и температуры рассеянной волны; парные произведения вида $(\vec{v}_1\vec{v}_2)$ есть компонента Фурье $(\vec{v}_1\vec{v}_2)_\omega$; $\vec{I}$ — полный ток в плазменном цилиндре, зависящий от первичных полей и от рассеянного поля. Ток находим обычным методом [6]

$$\vec{I} = -en_0\vec{v} - e(n_1\vec{v}_2 + n_2\vec{v}_1). \tag{6}$$

Используя уравнения движения (5) и условие адиабатичности (4), ток (6) запишем в виде

$$\vec{I} = \frac{ie^2 n_0}{m\omega}\left(\vec{E} + \frac{1}{en_0} ms^2 \nabla n\right) + \vec{J}_s, \tag{7}$$

где

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \frac{ien_0}{\omega}\nabla(\vec{v}_1\vec{v}_2) - e(n_1\vec{v}_2 + n_2\vec{v}_1) - \\ - \frac{ies^2}{\omega n_0}\nabla(n_1 n_2) + \frac{ie}{m\omega}\gamma\nabla(n_1 T_2). \tag{8}$$

Ток $\vec{J}_s(\vec{r})$ обусловлен лишь взаимодействием первичных волн внутри плазменного объема и играет роль рассеивающего тока.

В случае холодного плазменного цилиндра $T_i = 0$, $T_0 = 0$, $P_i = 0$; тогда вместо (8) имеем

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \frac{ien}{\omega}\nabla(\vec{v}_1\vec{v}_2), \tag{9}$$

что совпадает с результатом работы [1].

Соотношения (1) — (8) совместно с граничными условиями (непрерывность тангенциальных составляющих полей и равенство нулю радиальной скорости) описывают различные нелинейные эффекты в горячем плазменном цилиндре в приближении заданного поля.

Нелинейное электромагнитное поле во внешней области

Поскольку частота рассеянного поля может быть любой по отношению к ленгмюровской частоте ω_0, задача определения поля по заданному току $\vec{J}_s(\vec{r})$ должна ставиться как краевая задача.

Согласно (7), уравнения Максвелла для рассеянного поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = ik_0\vec{H}, \ \operatorname{rot}\vec{H} = -ik_0\varepsilon\vec{E} + ik_0\frac{1-\varepsilon}{en_0}ms^2\nabla n + \frac{4\pi}{c}\vec{J}_s. \quad (10)$$

Поле вне плазменного объема удобно определить на основании принципа взаимности, который сохраняет силу и для сред с газокинетическим давлением [7, 8]. Если в качестве вспомогательного источника выбран единичный диполь $\vec{p}$ ($p = 1$), расположенный в некоторой точке $\vec{r}$ вне цилиндра, то проекция поля на направление $\vec{p}$ определяется выражением

$$E_p(\vec{r}) = \frac{i}{\omega}\int \vec{J}_s(\vec{r}')\vec{E}'(\vec{r}, \vec{r}')\,d\vec{r}'. \quad (11)$$

Вспомогательное поле $\vec{E}'(\vec{r}, \vec{r}'')$ представляет собой внутреннее дифракционное поле цилиндра при решении задачи дифракции поля электрического диполя на сжимаемом плазменном цилиндре; в случае бесконечности длинного цилиндра имеет вид

$$\vec{E}'(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp[i\beta(z'-z) + in(\varphi'-\varphi)] \times \quad (12)$$

$$\times \left\{a_1'\left[\vec{\varphi}_1 - \frac{i\beta(1-\varepsilon)}{k_0}\eta_2\frac{J_n(\lambda_1 a)}{J_n(\lambda_2 a)}\vec{\varphi}_3'\right] + ia_2'\left[\vec{\varphi}_2' - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{in(1-\varepsilon)}{a}\eta_2\frac{J_n(\lambda_1 a)}{J_n(\lambda_2 a)}\vec{\varphi}_3'\right]\right\},$$

где

$$\vec{\varphi}_1' = \frac{1}{k_0}\left[i\beta J_n'(\lambda_1 r')\vec{e}_{r'} - \left(\frac{n\beta}{r'}\vec{e}_{\varphi'} - \lambda_1\vec{e}_{z'}\right)J_n(\lambda_1 r')\right];$$

$$\vec{\varphi}_2' = \frac{in}{r'}J_n(\lambda_1 r')\vec{e}_{r'} - J_n'(\lambda_1 r')\vec{e}_{\varphi'};$$

$$\vec{\varphi}_3 = J_n'(\lambda_2 r')\vec{e}_{r'} + \left(\frac{in}{r'}\vec{e}_{\varphi'} + i\beta\vec{e}_{z'}\right)J_n(\lambda_2 r');$$

$$\lambda_1^2 = k_0^2\varepsilon - \beta^2; \ \tilde{\lambda}^2 = k_0^2 - \beta^2;$$

$$a_j' = \frac{k_0^2\delta_{js}\varphi_s}{\pi a\lambda_1^2\tilde{\lambda}^2\Delta}; \quad s = 1, 2; \ j = 1, 2;$$

$$\lambda_1^2 = \frac{k_0^2c^2}{s^2}\varepsilon - \beta^2;$$

$$\delta_{11} = \tilde{T} + \tilde{\gamma}; \quad \delta_{12} = -\left(\Gamma' + \gamma'\frac{\eta_1}{\eta_0}\right); \ \delta_{21} = \Gamma' + \gamma'; \ \delta_{22} = \Gamma + \gamma;$$

$$\Delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21};$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{k_0}\left[i\beta H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}r)\, p_r + \left(\frac{n\beta}{r}\, p_\varphi - \tilde{\lambda}^2 p_z\right) H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}r)\right]; \tag{13}$$

$$\varphi_2 = \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}r)\, p_r - iH_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}r)\, p_\varphi;$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} J_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}a) - \frac{1}{\lambda_1^2} J'_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a);$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{k_0^2 n^2 (1-\varepsilon)}{\lambda_1^2 \tilde{\lambda}^2 a^2}\, \eta_2 J_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a);$$

$$\Gamma = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} J_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}a) - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} J'_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a);$$

$$\gamma = \frac{\beta^2 (1-\varepsilon)}{\lambda_1^2 \tilde{\lambda}^2}\, \eta_2\, J'_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}a);$$

$$\Gamma' = \frac{in\beta}{k_0 a}\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) J_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a);$$

$$\gamma' = \frac{in\beta k_0 (1-\varepsilon)}{\lambda_1^2 \tilde{\lambda}^2 a}\, \eta_2 J'_n(\lambda_1 a)\, H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a);$$

$$\eta_{1,2} = \frac{J_n(\lambda_{1,2} a)}{J'_n(\lambda_{1,2} a)}; \quad \eta_3 = \frac{H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)}{H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}a)};$$

$J_n(x)$ — функции Бесселя;

$H_n^{(1)}(x)$ — функции Ханкеля.

Штрих означает дифференцирование по радиусу.

Для получения вспомогательного поля $\vec{E}'(\vec{r}, \vec{r}')$ были использованы дифференциальные уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей, а также давления, вытекающие из (1) — (5) в отсутствие тока $\vec{J}_s(\vec{r})$:

$$\Delta\vec{E}'^t + k_0^2\varepsilon\vec{E}'^t = 0; \quad \Delta\vec{H}'^t + k_0^2\varepsilon\vec{H}'^t = 0;$$

$$E'^l = \frac{1-\varepsilon}{en_0\varepsilon}\nabla P; \quad \Delta P + \frac{k_0^2 c^2}{s^2}\varepsilon P = 0. \tag{14}$$

Переизлученное поле во внешней области можно получить также с помощью метода функций Грина. При этом мы будем исходить из уравнений (1) — (8) для рассеянного поля.

Производя разбиение поля на поперечную и продольную части

$$\vec{E} = \vec{E}^t + \vec{E}^l,\ \vec{H} = \vec{H} + \vec{H}^t + \vec{H}^l,\ \vec{H}^l = 0, \tag{15}$$

для поперечных волн имеем

$$\operatorname{rot}\vec{E}^t = ik_0\vec{H}^t;\ \operatorname{rot}\vec{H}^t = -ik_0\varepsilon\vec{E}^t + \frac{4\pi}{c}\vec{J}_s. \tag{16}$$

Из (16) следуют дифференциальные уравнения для продольных составляющих полей в области $r \leqslant a$:

$$\Delta E_z^t + k_0^2\varepsilon E_z^t = -4\pi\rho_{Ez}(\vec{r});\quad \Delta H_z^t + k_0^2\varepsilon H_z^t = -4\pi\rho_{Hz}(\vec{r}), \tag{17}$$

где

$$\rho_{Ez}(\vec{r}) = \frac{i}{\omega\varepsilon}(\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\vec{J}_s + k_0^2\varepsilon\vec{J}_s)\vec{e}_z;$$

$$\rho_{Hz}(\vec{r}) = \vec{e}_z\frac{1}{c}\operatorname{rot}\vec{J}_s.$$

Остальные компоненты полей находим из уравнений (16).

Для продольных волн, магнитное поле которых тождественно равно нулю:

$$\vec{E}^l = \frac{1-\varepsilon}{en_0\varepsilon}\operatorname{grad}P, \tag{18}$$

где давление $P(\vec{r})$ определяется дифференциальным уравнением, справедливым при $r \leqslant a$

$$\Delta P + \frac{k_0^2c^2}{s^2}\varepsilon P = -4\pi\rho_P(\vec{r}) \tag{19}$$

с источником

$$\rho_P(\vec{r}) = -\frac{ien_0}{\omega}\operatorname{div}\vec{J}_s.$$

Решение неоднородных волновых уравнений (17) и (19) состоит из двух частей:

несингулярной части, которая представляет собой электромагнитное поле, отраженное от границ (случай $\vec{E}^t$ и $\vec{H}^t$), и распределения давления внутри плазменного объема;

сингулярной части, которая описывает величины, связанные с источником.

Запишем решения этих уравнений с учетом цилиндрической симметрии задачи в виде

$$E_z^t(\vec{r}) = \sum_{n=\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\exp[-i(\beta z + n\varphi)]\left[a_1'\frac{\lambda_1^2}{k_0}J_n(\lambda_1 r) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_1^2}{k_0}\Phi_1(r)\right]; \tag{20}$$

$$H_z^t(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp[-i(\beta z + n\varphi)] \left[a_2' \frac{\lambda_1^2}{k_0} J_n(\lambda_1 r) + \frac{\lambda_1^2}{k_0} \Phi_2(r) \right];$$

$$P(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp[-i(\beta z + n\varphi)] [a_3' J_n(\lambda_2 r) + \Phi_3(r)],$$

где

$$\Phi_{1,2}(r) = \frac{k_0}{\lambda_1^2} \int \rho_{E,H,z,n,\beta}(r') G_1(r-r') r' dr';$$

$$\Phi_3(r) = \int \rho_{Pn\beta}(r') G_2(r-r') r' dr';$$

$G_{1,2}(r-r')$ — функция Грина одномерного оператора Штурма—Лиувилля;

$$G_{1,2}(r-r') = 2\pi^2 i \begin{cases} J_n(\lambda_{1,2} r') H_n^{(1)}(\lambda_{1,2} r), & r' \leqslant r; \\ J_n({}_{1,2} r) H_n^{(1)}(\lambda_{1,2} r'), & r' \geqslant r. \end{cases} \quad (21)$$

Переизлученное поле удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, решение которых запишем в виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty} d\beta \exp[-i(\beta z + n\varphi)] (-a_1 \vec{\varphi}_1 + a_2 \vec{\varphi}_2);$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp[-i(\beta z + n\varphi)] (-a_1 \vec{\varphi}_2 - a_2 \vec{\varphi}_1), \quad (22)$$

где

$$\vec{\varphi}_1 = \frac{1}{k_0} \left[i\beta H_n^{(1)\prime}(\tilde{\lambda} r) \vec{e}_r + \left(\frac{n\beta}{r} \vec{e}_\varphi - \tilde{\lambda}^2 \vec{e}_z \right) H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r) \right];$$

$$\vec{\varphi}_2 = \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r) \vec{e}_r - i H_n^{(1)\prime}(\tilde{\lambda} r) \vec{e}_\varphi.$$

В дальнейшем потребуется радиальная составляющая скорости электронов

$$v_r(\vec{r}) = \frac{-ie}{m\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp[-i(\beta z + n\varphi)] \Big\{ -a_1' \frac{i\beta}{k_0} J_n'(\lambda_1 r) +$$

$$+ a_2' \frac{n}{r} J_n(\lambda_1 r) + a_3' \frac{1}{en_0\varepsilon} J_n'(\lambda_2 r) - \frac{i\beta}{k_0} \Phi_1'(r) + \quad (23)$$

$$+ \frac{1}{en_0\varepsilon} \Phi_3'(r) - \frac{4\pi i k_0}{c\lambda_1^2} J_{rn\beta}(r) \Big\}.$$

Подчиняя поля и скорость граничным условиям на поверхности раздела $r = a$, которые имеют вид

$$E_z^t + E_z^l = E_z; \; H_z^t = H_z; \; E_\varphi^t + E_\varphi^l = E_\varphi; \; H_\varphi^t = H_\varphi; \; v_r = 0, \quad (24)$$

получаем неоднородную систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид:

$$a_1' = \frac{iH_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)}{\lambda_1^2\Delta}(-A_1\delta_{12} + A_2\delta_{11}); \quad a_2' = \frac{iH_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)}{\lambda_1^2\Delta}(A_2\delta_{21} - A_1\delta_{22});$$

$$a_3' = en_0\varepsilon\eta_2 \frac{1}{J_n(\lambda_2 a)}\left[a_1' \frac{i\beta}{k_0} J_n(\lambda_1 a) - a_2' \frac{n}{a} J_n(\lambda_1 a) + M_5(a)\right]; \quad (25)$$

$$a_1 = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)}\left[a_1'\lambda_1^2 J_n(\lambda_1 a) + a_3' \frac{i\beta k_0(1-\varepsilon)}{en_0\varepsilon} J_n(\lambda_2 a) - k_0 M_1(a)\right];$$

$$a_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)}[a_2'\lambda_1^2 J_n(\lambda_1 a) - k_0 M_2(a)],$$

где приняты обозначения (13), а также

$$A_1 = M_3(a) + \frac{n\beta}{a\tilde{\lambda}^2} M_1(a) + \frac{ik_0}{\tilde{\lambda}^2}\frac{H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}a)}{H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)} M_2(a) + \frac{ink_0^2(1-\varepsilon)}{a\tilde{\lambda}^2}\eta_2 M_5(a);$$

$$A_2 = M_4(a) + \frac{n\beta}{a\tilde{\lambda}^2} M_2(a) - \frac{ik_0}{\tilde{\lambda}^2}\frac{H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}a)}{H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)} M_1(a) + \frac{\beta k_0(1-\varepsilon)}{\tilde{\lambda}^2}\eta_2 \frac{H_n^{(1)'}(\tilde{\lambda}a)}{H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a)} M_5(a);$$

$$M_1(a) = -\frac{\lambda_1^2}{k_0}\Phi_1(a) + \frac{i\beta(1-\varepsilon)}{en_0\varepsilon}\Phi_3(a);$$

$$M_2(a) = -\frac{\lambda_1^2}{k_0}\Phi_2(a); \quad (26)$$

$$M_3(a) = \frac{n\beta}{k_0 a}\Phi_1(a) + i\Phi_2'(a) + \frac{in(1-\varepsilon)}{en_0\varepsilon a}\Phi_3(a) + \frac{4\pi i k_0}{c\lambda_1^2} J_{s\varphi n\beta}(a);$$

$$M_4(a) = -i\varepsilon\Phi_1'(a) + \frac{n\beta}{k_0 a}\Phi_2(a) - \frac{4\pi i\beta}{c\lambda_1^2} J_{srn\beta}(a);$$

$$M_5(a) = \frac{i\beta}{k_0}\Phi_1'(a) - \frac{n}{a}\Phi_2(a) - \frac{1}{n_0 e\varepsilon}\Phi_3'(a) + \frac{4\pi i k_0}{\lambda_1^2 c} J_{srn\beta}(a);$$

$$\Phi_{1,2,3}'(a) = \left.\frac{\partial\Phi_{1,2,3}(r)}{\partial r}\right|_{r=a}.$$

Нелинейное поле во внешней области в случае разреженной плазмы

Пусть на плазменный объем нормально падают две плоских волны вида

$$\vec{E}_i = \vec{e}_z E_i^0 e^{i\vec{k}_i \vec{r}} + kc. \tag{27}$$

Тогда компонента Фурье по времени для тока, вызывающего рассеянные волны (8), будет иметь вид

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \frac{ien_0}{\omega} \nabla (\vec{v}_1 \vec{v}_2) = - \frac{ie^3 n_0}{m^2 \omega \omega_1 \omega_2} \sigma_{1,2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in(\varphi_0 - \varphi)} \times$$

$$\times J_n'(gr)\vec{e}_r - \frac{in}{r} J_n(gr)\vec{e}_\varphi \Big], \tag{28}$$

где

$$\sigma_{1,2} = \sum_{l_{1,2}=\pm 1} l_1 E^{0l_1} l_2 E^{0l_2} \delta(\omega + l_1\omega_1 + l_2\omega_2);$$

$$\varphi_0 = (\vec{g} \overset{\wedge}{} \vec{e}_x); \quad \vec{g} = l_1\vec{k}_1 + l_2\vec{k}_2;$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c}; \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c}.$$

При верхнем отрицательном индексе в $\sigma_{1,2}$ соответствующая величина берется комплексно сопряженной. Проекция рассеянного поля на направление $\vec{p}$, вычисленная на основании принципа взаимности (11) или на основании метода функций Грина, дается выражением

$$E_p(\vec{r}) = \frac{e(1-\varepsilon)}{m\omega_1\omega_2 a k_0^2} \sigma_{1,2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n n \exp[i(\varphi_0 - \varphi) n] J_n(ga) J_n(k_0 \sqrt{\varepsilon} a) \times$$

$$\times \frac{1 + \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2 \varepsilon - g^2 s^2}\left(1 - \dfrac{\eta_2}{\eta_0}\right)}{\tilde{\Gamma} + \tilde{\gamma}} \left[+ \frac{n}{r} H_n^1(k_0 r) p_r - i H_n^{(1)\prime}(k_0 r) p_\varphi \right], \tag{29}$$

где приняты обозначения (13) при $\beta = 0$, $a\eta_0 = \dfrac{J_n(ga)}{J_n'(ga)}$.

В волновой зоне ($k_0 r \gg 1$), как нетрудно проверить, поле (29) имеет структуру цилиндрической волны, как и должно быть для случая бесконечного цилиндра.

В предельном случае тонкого цилиндра ($k_0 a \ll 1$, $k_0 \sqrt{\varepsilon a} \ll 1$) основной вклад в переизлученное поле дают колебания $n = \pm 1$. Сохраняя в рядах для функций Бесселя только первые члены и удерживая величины, описывающие радиационное затухание, получим из (29)

$$E_p(\vec{r}) = \frac{e\pi a k_0 \varepsilon (1-\varepsilon)}{m\omega_1\omega_2} \sigma_{1,2} J_1(ga) \times$$

$$\times \frac{1 + \left.\frac{\omega_0^2}{\omega^2\varepsilon - g^2 s^2}\left(1 - \frac{h_2}{h_0}\right)\right|_{n=1}}{\left\{1 + \varepsilon - i\pi\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2(\varepsilon - 1) + (\varepsilon - 1)\left[1 + i\pi\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2\right]\frac{\eta_2}{a}\right.} \times \tag{30}$$

$$\times \left[\frac{1}{r} H_1^{(1)}(k_0 r)\, p_r \cos(\varphi_0 - \varphi) + H_1^{(1)\prime} p_\varphi \sin(\varphi_0 - \varphi)\right].$$

В волновой зоне роль радиальной компоненты не существенна, а для азимутальной компоненты из (30) вытекает

$$E_\varphi(r) = \frac{e\pi k_0^2 a\varepsilon (1-\varepsilon)}{m\omega_1\omega_2} \sigma_{1,2} \times$$

$$\times \frac{1 + \left.\frac{\omega_0^2}{\omega^2\varepsilon - g^2 s^2}\left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_0}\right)\right|_{n=1}}{\left\{1 + \varepsilon - i\pi\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2(\varepsilon - 1) + (\varepsilon - 1)\left[1 + i\pi\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2\right]\frac{\eta_2}{a}\right.} \times \tag{31}$$

$$\times J_1(ga) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \exp\left(ik_0 r - \frac{\pi}{4}\right) \sin(\varphi_0 - \varphi).$$

Из (30) и (31) вытекают условия резонанса, определяемые соотношениями

$$\omega^2\varepsilon - g^2 s^2 = 0; \tag{32}$$

$$1 + \varepsilon - i\pi\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2(\varepsilon - 1) + (\varepsilon - 1)\left[1 + i\pi\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2\right]\frac{\eta_2}{a} = 0. \tag{33}$$

Из (32) следует

$$\omega^2 = \omega_0^2 + g^2 s^2. \tag{34}$$

Таким образом, условие резонанса определяется не только плазменной частотой ω_0, но и тепловой скоростью электронов s и зависят от частоты взаимодействующих волн g.

Опуская в (33) члены $(k_0 a^2) \ll 1$, получим [9]

$$a(1+\varepsilon) J_1'\left(\frac{\omega}{s}\sqrt{\varepsilon a}\right) = (1-\varepsilon) J_1\left(\frac{\omega}{s}\sqrt{\varepsilon a}\right). \tag{35}$$

Если в (34) и (35) положить $T_0 = 0$ (холодная плазма), то из них следуют известные условия резонансного взаимодействия в цилиндрическом столбе холодной плазмы [1, 10]

$$\omega = \omega_0; \ \varepsilon = -1. \tag{36}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Якименко. Радиофизика, **12**, 495, 1968.
2. В. Н. Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. Изд-во «Наука», 1967.
3. N. M. Kroll, A. Ron, N. Rostoker. Phys. Rev. Zett., **13**, 83, 1964.
4. D. F. ДиBois, M. V. Goldman, Phys, Rev., **164**, 207, 1968.
5. И. П. Якименко. ЖЭТФ, **54**, 255, 1968.
6. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов. Коллективные колебания в плазме. Атомиздат, 1964.
7. S. M. Samaddar. Appl. Sci. Res., **B11**, 84 1964.
8. D. K. Cheng, H. C. Chen, IEEE Trans., AP—14, 519, 1966.
9. В. Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев. «Радиотехника и электроника», **10**, 658, 1965.
10. H. C. Chend. J. C. Lec. Phys. Rev., **156**, 172, 1967.