О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛУЧЕЙ

А. А. Янцевич

Харьков

Рассмотрим основные уравнения приближения геометрической оптики для неоднородных сред, характеризуемых случайным показателем преломления $n(\vec{r})$:

$$\frac{d}{ds}\left(n\left(\vec{r}\right)\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n\left(\vec{r}\right); \tag{1}$$

$$\vec{r}(s) = (x_1(s),\ x_2(s),\ x_3(s)).$$

Пусть

$$< n\left(\vec{r}\right) > = \alpha\left(\vec{r}\right);$$

$$< n\left(\vec{r}_1\right) n\left(\vec{r}_2\right) > = R\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right), \tag{2}$$

где скобки означают вероятностное усреднение.

В работах [1—3] для описания распространения луча света в случайной среде использована марковская модель, однако связь между локальными характеристиками марковского процесса и стохастическим дифференциальным уравнением для луча (1) в общем случае отсутствовала. Система (1) представляет собой пространственный нелинейный осциллятор, и для применения аппарата марковских процессов необходимо сначала формально избавиться от последействия в уравнении путем расширения фазового пространства [4]:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{n}\vec{v}(s); \tag{3}$$

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \nabla n.$$

Если радиус корреляции $n(\vec{r})$ мал, на расстояниях, больших радиуса корреляции, решение системы (3) можно считать марковским процессом. Таким образом, в дальнейшем предполагается, что шестимерный вектор $(\vec{r}(s), \vec{v}(s))$ является марковским. Тогда соответствующее системе (3) уравнение ФПК (Фоккера — Планка — Колмогорова) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i w) - \frac{\partial}{\partial v_i}(b_i w) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{ik} w) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k}(b_{ik} w) \tag{4}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование от единицы до трех). Коэффициенты сноса a_i и b_i и коэффициенты диффузии a_{ik} и b_{ik} определяются следующим образом:

$$a_i = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\langle \Delta x_i \rangle}{\Delta s}; \quad b_i = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta s}; \tag{5}$$

$$a_{ik} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\langle \Delta x_i \Delta x_k \rangle}{\Delta s}; \quad b_{ik} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle}{\Delta s}.$$

Для установления связи между a_i, b_i, a_{ik}, b_{ik} и системой (3) перейдем от стохастических дифференциальных уравнений (3) к соответствующим стохастическим разностным уравнениям. Воспользуемся методом, развитым в работе [5]. Так,

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} v_i \Delta s + 0(\Delta s), \tag{6}$$

где

$$\frac{\langle 0(\Delta s) \rangle}{\Delta s} \to 0 \ (\Delta s \to 0),$$

и, следовательно,

$$a_i = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\langle \Delta x_i \rangle}{\Delta s} = \frac{v_i}{\alpha(x_1, x_2, x_3)}. \tag{7}$$

Аналогично

$$b_i = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta s} = \frac{\partial}{\partial x_i}\alpha(x_1, x_2, x_3). \tag{8}$$

Отметим, что при вычислении средних в выражениях для a_i и b_i величины x_i и v_i, как это принято в теории марковских процессов, фиксированы.

При вычислении a_{ik} и b_{ik} предположим, что

$$\{R(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\ x_3+\Delta x_3;\ x_1,\ x_2,\ x_3)\}^3 = \gamma(x_1,\ x_2,\ x_3)\,\delta(<\Delta x_1>,\ <\Delta x_2>,\ <\Delta x_3>), \tag{9}$$

где $\delta(\xi)$ — δ-функция.

Тогда

$$a_{ik} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{<\Delta x_i \Delta x_k>}{\Delta s} = \frac{v_i v_k \alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\sqrt[3]{\gamma(x_1, x_2, x_3)\, v_1 v_2 v_3}} \tag{10}$$

и соответственно

$$b_{ik} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left\{\frac{\sqrt[3]{\gamma(x_1, x_2, x_3)\, v_1 v_2 v_3}}{\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)}\right\}. \tag{11}$$

Следовательно, уравнение ФПК (4) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -v_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)\,w) - \frac{\partial \alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\frac{v_i v_k}{\sqrt[3]{v_1 v_2 v_3}}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left\{\frac{\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\sqrt[3]{\gamma(x_1,\ x_2,\ x_3)}}\,w\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left\{\frac{\sqrt[3]{\gamma(x_1,\ x_2,\ x_3)}}{\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3)}\right\}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k}\left\{\sqrt[3]{v_1 v_2 v_3}\,w\right\}. \tag{12}$$

Заметим, что аналогичное уравнение можно получить для системы вида

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{v};$$

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \left[\vec{v}\left[\Delta \ln n\vec{v}\right]\right]. \tag{13}$$

Однако соответствующее уравнение ФПК для системы (13) не допускает, в отличие от (12), постановки краевых задач по x_i, возникающих при изучении распространения луча в слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Харанен. О распространении звука в среде со случайными флуктуациями показателя преломления. ДАН СССР, т. 88, № 2, 1953.
2. Л. А. Чернов. Распространения волн в среде со случайными неоднородностями. Изд. АН СССР, 1958.
3. H. Scheffler. Strahlenoptische Ausbreitung in Medien mit statistisch verteilten Inhomogenitaten, I, Astron Machricht., 28, 1958, p. 227—232.
4. А. Н. Колмогоров. Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН, вып. 5, 1938.
5. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов. Корреляционные функции в теории броуновского движения. ЖТФ, т. 26, вып. 2, 1954.