# СЛОЖНЫЕ ВОЛНОВОДЫ ЖЕЛОБКОВОГО ТИПА С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

*Г. К. Снурникова*

**Харьков**

Закрытые волноводы сложного поперечного сечения желобкового типа пригодны для канализации энергии в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн, когда необходимо увеличить поперечные размеры волновода, сохраняя значение критической частоты. Обычно при решении задач о распространении электромагнитных волн в таких системах рассматривались волноводы с симметричным поперечным сечением [1—5].

В настоящей работе в строгой постановке решена электродинамическая задача о собственных волнах, распространяющихся в волноводах с несимметричным поперечным сечением желобкового типа. Полученные при этом бесконечные системы линейных алгебраических уравнений позволяют численно найти параметры системы без ограничений на длину волны и размеры волновода. В случае, когда высота выступа значительно больше высоты боковых областей волновода $\left(\frac{d}{b} \ll 1\right)$, найдено приближенное решение систем уравнений в явном виде. Определены поля в аналитической форме.

Рассматриваемый закрытый желобковый волновод несимметричного поперечного сечения, показанный на рис. 1, представляет собой структуру с идеально проводящими стенками. Среда внутри волновода однородна, изотропна $\varepsilon = \mu = 1$. Выделим в сечении волновода три области: область 1 — $-(a_1 + h) \leqslant x \leqslant -h$, $|y| \leqslant d$; область 2 — $|x| \leqslant h$, $|y| \leqslant b$; область 3 — $h \leqslant x \leqslant (a_2 + h)$, $|y| \leqslant d$.

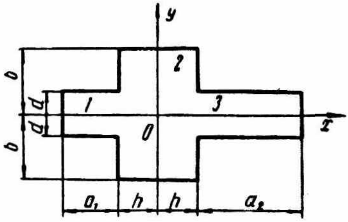

Рис. 1. Закрытый желобковый волновод несимметричного поперечного сечения.

Продольную составляющую поля $H_z$ распространяющихся в волноводе $H$-волн в областях 1, 2, 3 будем искать в виде (временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем)

$$H_{z1} = e^{i\gamma z} \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_m e^{-iq_m(x+h)} + b_m e^{iq_m(x+h+a_1)}\right] \cos\frac{\pi m}{2d}(y+d); \quad (1)$$

$$H_{z2} = e^{i\gamma z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n \cos p_n x + d_n \sin p_n x]\, e^{i\frac{\pi n}{b}y}; \quad (2)$$

$$H_{z3} = e^{i\gamma z} \sum_{m=0}^{\infty} \left[f_m e^{iq_m(x-h)} + g_m e^{-iq_m(x-h-a_2)}\right] \cos\frac{\pi m}{2d}(y+d), \quad (3)$$

где $a_m, b_m, c_n, d_n, f_m, g_m$ — неизвестные амплитудные коэффициенты Фурье-поля;

$$p_n = \sqrt{k^2 - \gamma^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}, \quad q_m = \sqrt{k^2 - \gamma^2 - \left(\frac{\pi m}{2d}\right)^2}$$

находятся из условия подчинения полей (1), (2), (3) волновому уравнению, причем знаки $p_n$ и $q_m$ определены так, что $\operatorname{Im} p_n > 0$, $\operatorname{Im} q_m > 0$. Обозначения размеров волновода и выбранная система координат показаны на рис. 1.

Поле в волноводе будет определено, если коэффициенты Фурье-поля $a_m, b_m, c_n, d_n, f_m, q_m$ подобраны таким образом, что на металлических поверхностях волновода выполняется условие $E_{\text{танг}} = 0$, а на границах областей 1, 2 и 2, 3 поле непрерывно. Эти условия приводят к функциональным соотношениям

$$b_m = a_m e^{iq_m a_1}; \quad g_m = f_m e^{iq_m a_2};$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n (c_n \sin p_n h + d_n \cos p_n h)\, e^{i\frac{\pi n}{b}y} =$$

$$= \begin{cases} -\sum\limits_{m=0}^{\infty} q_m A_m \sin q_m a_1 \cos\frac{\pi m}{2d}(y+d); \\ 0, \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \cos p_n h - d_n \sin p_n h)\, e^{i\frac{\pi n}{b}y} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos q_m a_1 \cos \frac{\pi m}{2d}(y+d); \tag{4}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n (c_n \sin p_n h - d_n \cos p_n h)\, e^{i\frac{\pi n}{b}y} =$$

$$= \begin{cases} -\sum_{m=0}^{\infty} q_m F_m \sin q_m a_2 \cos \frac{\pi m}{2d}(y+d); \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \cos p_n h + d_n \sin p_n h)\, e^{i\frac{\pi n}{b}y} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos q_m a_2 \cos \frac{\pi m}{2d}(y+d),$$

где

$$A_m = 2a_m e^{iq_m a_1}; \; F_m = 2f_m e^{iq_m a_2}.$$

Пользуясь полнотой системы функций $e^{i\frac{\pi n}{b}y}$ на интервале $(-b; b)$ и системы функций $\cos\frac{\pi m}{2d}(y+d)$ на интервале $(-d, d)$ [6], можно свести (4) к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода относительно амплитудных коэффициентов $c_n$, $d_n$

$$p_n (c_n \sin p_n h + d_n \cos p_n h) = -\sum_{s=-\infty}^{\infty} (c_s \cos p_s h - d_s \sin p_s h)\left[U_{ns}^{(0)} + U_{ns}^{(m)}\right]; \tag{5}$$

$$p_n (c_n \sin p_n h - d_n \cos p_n h) = -\sum_{s=-\infty}^{\infty} (c_s \cos p_s h + d_s \sin p_s h)\left[V_{ns}^{(0)} + V_{ns}^{(m)}\right];$$

где

$$U_{ns}^{(0)} = \theta k_c \operatorname{tg} k_c a_1 S_{0n} S_{0s}, \; V_{ns}^{(0)} = \theta k_c \operatorname{tg} k_c a_2 S_{0n} S_{0s};$$

$$U_{ns}^{(m)} = ns\theta^3 \sum_{m=1}^{\infty} q_m \operatorname{tg} q_m a_1 \frac{S_{mn} S_{ms}}{\left(n\theta + \frac{m}{2}\right)\left(s\theta + \frac{m}{2}\right)}; \quad S_{mn} = \frac{\sin \pi \left(n\theta - \frac{m}{2}\right)}{\pi \left(n\theta - \frac{m}{2}\right)};$$

$$V_{ns}^{(m)} = ns\theta^3 \sum_{m=1}^{\infty} q_m \operatorname{tg} q_m a_2 \frac{S_{mn} S_{ms}}{\left(n\theta + \frac{m}{2}\right)\left(s\theta + \frac{m}{2}\right)}; \; S_{mz} = \frac{\sin \pi \left(s\theta - \frac{m}{2}\right)}{\pi \left(s\theta - \frac{m}{2}\right)};$$

$$\theta = \frac{d}{b}; \quad k_c = \sqrt{k^2 - \gamma^2}.$$

Полученные системы линейных алгебраических уравнений представляют собой строгое решение задачи о распространении $H$-волн в закрытом несимметричном желобковом волноводе. Они дают возможность, используя ЭВМ, найти численным способом постоянную распространения и поля внутри структуры при произвольных геометрических размерах волновода и любой длине волны.

Подобные системы уравнений встречаются при изучении резонансных свойств структур с дифракционными решетками [7]. Характерной особенностью таких систем уравнений является то, что для неизвестных $c_n$, $d_n$ не удается получить две независимые системы. Физически это означает, что в закрытом желобковом волноводе несимметричного поперечного сечения колебания симметричные и несимметричные относительно плоскости $x = 0$ связаны между собой. В симметричных системах желобкового типа, когда плоскость $x = 0$ является плоскостью симметрии волновода, такая связь между колебаниями отсутствует, колебания разделяются на симметричные и несимметричные, и в этом случае для коэффициентов Фурье-поля удается записать две независимые системы уравнений.

Нахождение параметров волновода в общем случае численным решением систем уравнений (5) связано с довольно трудоемкими вычислениями. В случае, когда соотношение между размерами волновода $d$ и $b$ $\left(\theta = \frac{d}{b}\right)$ таково, что $\theta^2 \ll 1$, удается получить приближенное решение систем уравнений (5) в явном виде, используя результаты работ [6, 7]. Решение систем уравнений (5) представим в виде

$$c_n = c_n^{(0)} + c_n^{(1)}; \quad d_n = d_n^{(0)} + d_n^{(1)}. \tag{6}$$

где $c_n^{(0)}$, $d_n^{(0)}$ — решение данных систем, когда $U_{ns}^{(m)} = 0$, $V_{ns}^{(m)} = 0$; $c_n^{(1)}$, $d_n^{(1)}$ — малые добавки, пропорциональные, как можно показать, $\theta^3$. Полученные в результате такого представления решения (6) системы уравнений (5) приобретают вид

$$c_n^{(0)} = -\frac{\theta k_c h S_{0n}}{2\varphi_n \sin\varphi_n} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [c_s^{(0)} \cos\varphi_s (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) - d_s^{(0)} \sin\varphi_s (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)] S_{0s}; \tag{7}$$

$$d_n^{(0)} = -\frac{\theta k_c h S_{0n}}{2\varphi_n \cos\varphi_n} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [c_s^{(0)} \cos\varphi_s (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) - d_s^{(0)} \sin\varphi_s (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)] S_{0s}, \tag{8}$$

где

$$\alpha = k_c a_1; \quad \beta = k_c a_2; \quad \varphi_n = p_n h; \quad \varphi_s = p_s h.$$

Решение уравнений (7), (8) ищем в виде

$$c_n^{(0)} = \xi \frac{S_{0n}}{\varphi_n \sin \varphi_n} + d_n^{(0)} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \varphi_n; \tag{9}$$

$$d_n^{(0)} = \eta \frac{S_{0n}}{\varphi_n \cos \varphi_n} + c_n^{(0)} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \operatorname{ctg} \varphi_n, \tag{10}$$

где $\xi$, $\eta$ — неизвестные константы. Подставляя значение $c_n^{(0)}$, $d_n^{(0)}$ из (9), (10) в (7), (8), получим систему уравнений относительно $\xi$, $\eta$, условием существования решения которой является равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} \Psi(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) & -[2 - \Phi(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)] \\ 2 + \Psi(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) & \Phi(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

где

$$\Psi = \theta k_c h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg}\varphi_s}{\varphi_s} S_{0s}^2; \quad \Phi = \theta k_c h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\varphi_s}{\varphi_s} S_{0s}^2.$$

После преобразований имеем

$$(\operatorname{ctg}\alpha + \Psi)(\operatorname{ctg}\beta - \Phi) + (\operatorname{ctg}\beta + \Psi)(\operatorname{ctg}\alpha - \Phi) = 0. \tag{12}$$

Это уравнение, связывающее искомую постоянную распространения с длиной волны и геометрическими размерами поперечного сечения волновода, есть дисперсионное уравнение несимметричного закрытого желобкового волновода при значениях $\theta^2 \ll 1$. Для малых значений $\theta$ и $\varkappa = \frac{kb}{\pi} < \frac{1}{2}$ при решении дисперсионного уравнения (12) можно пользоваться приближенными значениями $\Psi$ и $\Phi$

$$\begin{gathered} \Psi = \theta\left(\operatorname{ctg} k_c h + 2\frac{k_c h}{\pi} \rho \ln \sin \frac{\pi\theta}{2}\right); \\ \Phi = \theta\left(\operatorname{tg} k_c h - 2\frac{k_c h}{\pi} \rho \ln \sin \frac{\pi\theta}{2}\right), \quad \rho = \frac{b}{h}. \end{gathered} \tag{13}$$

Из вида уравнения (12) можно заключить, что в несимметричном желобковом волноводе существуют связанные между собой симметричные и несимметричные типы колебаний. В случае, когда $a_1 = a_2$, уравнение (12) распадается на два уравнения

$$\operatorname{ctg}\alpha - \Psi = 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha - \Phi = 0, \tag{14}$$

которые соответствуют симметричным и несимметричным $H$-волнам в симметричной структуре. Иными словами, при $a_1 = a_2$ имеем разделение типов колебаний на симметричные и несимметричные $H$-колебания.

Если при возбуждении волновода выполняются условия

$$\operatorname{ctg}\alpha + \Psi = 0 \text{ либо } \operatorname{ctg}\beta + \Psi = 0,$$

из уравнения (12) следует, что между $a_1$ и $a_2$ имеет место соотношение

$$a_1 - a_2 = \frac{N\lambda_0}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\varkappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \ \nu = \frac{\gamma b}{\pi}, \ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Такая же связь существует между $a_1$ и $a_2$, если выполняются условия

$$\operatorname{ctg}\alpha - \Phi = 0 \text{ либо } \operatorname{ctg}\beta - \Phi = 0.$$

Из уравнения (12) можно получить и другие соотношения между размерами волновода и длиной волны. Например, для значений $a_1 = \frac{N\lambda_0}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\varkappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ размер $a_2$ определяется из соотношения

$$\operatorname{ctg} k_c a_2 = \theta\left(\operatorname{ctg} 2k_c h + 2\frac{k_c h}{\pi}\rho \ln \sin\frac{\pi\theta}{2}\right).$$

При

$$h = \frac{2N-1}{8}\lambda_0\left(1 - \frac{\nu^2}{\varkappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \ (N = 1, 2, \ldots) \ \operatorname{ctg} k_c a_2 = \\ = \frac{2N-1}{2}\rho\theta \ln \sin\frac{\pi\theta}{2},$$

при

$$\operatorname{ctg} 2k_c h = -2\frac{k_c h}{\pi}\rho \ln \sin\frac{\pi\theta}{2} \quad a_2 = \frac{2N-1}{4}\lambda_0\left(1 - \frac{\nu^2}{\varkappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

В случае $2h = \frac{N\lambda_0}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\varkappa^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ дисперсионное уравнение (12) упрощается и принимает вид

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = -2\theta N\rho \ln \sin\frac{\pi\theta}{2}. \qquad (15)$$

Отсюда легко найти связь между $a_1$ и $a_2$ для различных значений $\theta$ и $\rho$. На рис. 2—4 представлены эти зависимости, посчитанные по формуле (15), в случае $\beta = \frac{2M+1}{2}\pi$ для $N = 1$, $M = 0$; при этом связь между $a_2$ и $h$ выражается следующим образом: $(2M+1)h = Na_2$. Для $N = 1$ $M = 0$, $h = a_2$.

Определим поля в закрытом желобковом волноводе с несимметричным поперечным сечением. Для этого выделим в системах уравнений (5) нулевую пространственную гармонику $c_0$ (либо $d_0$) и выразим все $n$-е гармоники $c_n$, $d_n$ $(n \neq 0)$ через нулевую.

При малых значениях $\theta$ ($\theta^2 \ll 1$) и $\varkappa < \frac{1}{2}$ оказывается возможным записать поле в областях волновода 1, 2, 3 в аналитической форме

$$H_{z1} = -2d_0 \frac{\Phi \cos k_c h}{\theta (2 + u\Psi)} e^{i\gamma z} (1 + \Psi \operatorname{tg} k_c a_2) \frac{\cos k_c (x + h + a_1)}{\cos k_c a_1};$$

$$H_{z2} = d_0 e^{i\gamma z} \cos k_c h \left[ \frac{v\Psi}{2 + u\Psi} \left( \frac{\cos k_c x}{\sin k_c h} + \sigma_1 \right) + \left( \frac{\sin k_c x}{\cos k_c h} + \sigma_2 \right) \right];$$

$$H_{z3} = 2d_0 \frac{\Phi \cos k_c h}{\theta (2 + u\Psi)} e^{i\gamma z} (1 + \Psi \operatorname{tg} k_c a_1) \frac{\cos k_c (x - h - a_2)}{\cos k_c a_2};$$

$$u = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta; \; v = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta;$$

$$\sigma_1 = 2k_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos p_n x}{p_n \sin p_n h} S_{0n} \cos \frac{\pi n}{b} y; \; \sigma_2 = 2k_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n x}{p_n \cos p_n h} S_{0n} \cos \frac{\pi n}{b} y.$$

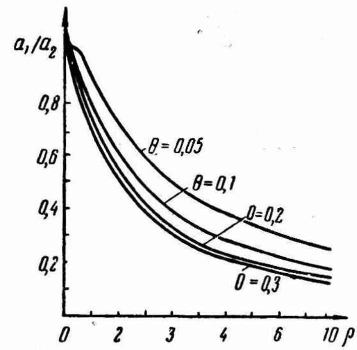


Рис. 2. Зависимость соотношения между размерами волновода $\frac{a_1}{a_2}$ от параметра $\rho$ для различных значений $\theta$.

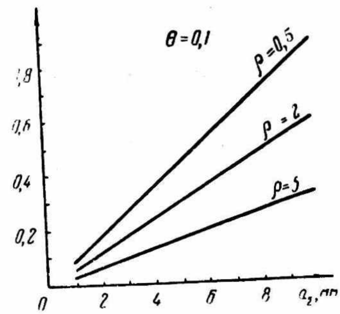


Рис. 3. Связь между $a_1$ и $a_2$ при постоянных $\theta$ и $\rho$.

Можно показать, что

$$|\sigma_i| < \frac{C}{1 - e^{\frac{\pi}{b}(h-x)}}, \; i = 1, 2,$$

где $(h - x) > 0$; $C$ — некоторая константа, зависящая от размера волновода $b$ и $\lambda_c$; $C = \frac{4b}{\lambda_c}$. Для значений $x = h$

$$|\sigma_i| < C \cdot \frac{\pi^2}{6}, \; i = 1, 2.$$

Таким образом, используемый в работе способ решения задачи о распространении электромагнитных волн в закрытом желобковом волноводе с несимметричным поперечным сечением позволяет определить поля в структуре в аналитической форме. В таком волноводе существуют связанные между собой симметричные и несимметричные колебания. Найдены условия разделения этих типов колебаний.

Автор выражает благодарность В. П. Шестопалову и О. А. Третьякову за постоянный интерес и внимание к работе.

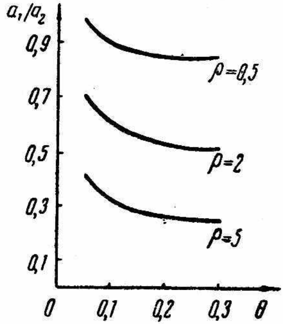


Рис. 4. Зависимость соотношения $\frac{a_1}{a_2}$ от параметра $\theta$ для $\rho = 0{,}5;\ 2;\ 5$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. М. Седых. Исследование волноводов крестообразной и $H$-образной формы поперечного сечения. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1960.
2. А. Я. Яшкин. Волноводы и резонаторы сложной формы. Автореф. докт. дисс., Москва, 1966.
3. Н. Н. Малов. Приближенный расчет критической волны $T$-образного волновода. Учен. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, т. 88, 1954.
4. Б. Л. Пичугин. Измерение критических волн в волноводах сложной формы. Учен. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, т. 88. 1954.
5. Hiroshi Shigesawa, Key Takiyama. On the Study of a Close Grooved Guide. The Science and Engin. Rev. of Doshisha Univ., 1968, **9**, 1, p. 9—40.
6. В. Г. Сологуб. Наклонное падение $H$-поляризованной плоской волны на периодическую решетку, составленную из брусьев прямоугольного сечения. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
7. С. С. Третьякова, О. А. Третьяков. Резонансные свойства систем с дифракционными решетками. Сб. «Радиотехника», вып. 10. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.