К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛЯ КВАЗИОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА В ВИДЕ УГЛОВОГО СПЕКТРА ПЛОСКИХ ВОЛН

Г. И. Хлопов

Харьков

При решении задач дифракции в квазиоптических пучках используется представление поля в виде углового спектра плоских волн [1]. Однако обычно рассматривается двумерный случай или же задачу сводят к двум двумерным [2]. Кроме того, при анализе модового состава пучка на выходе различных элементов тракта [2] большую роль играет скорость убывания «спектральной плотности» пучка плоских волн и ее поведение в области комплексных углов.

В настоящей работе получены выражения для трехмерной «спектральной плотности» в виде разложения по собственным типам волн квазиоптического волновода, что во многом упрощает дальнейший анализ. Приводятся также оценки спектральной плотности для характерных параметров пучка [7] и обсуждается вклад медленных волн.

Запишем скалярную амплитуду поля в виде углового спектра плоских волн [3, 4]

$$E(x, y, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dp\,dq\,A(p, q)\, e^{jk(px+qy+mz)}; \tag{1}$$

$$A(p, q) = \lim_{N \to \infty} \iint\limits_{-N}^{N} dx\,dy\,E(x, y, z)\, e^{-jk(px+qy+mz)}; \tag{2}$$

$$p = \sin\Theta\cos\varphi; \quad q = \sin\Theta\sin\varphi; \quad m = \sqrt{1 - p^2 - q^2}. \tag{3}$$

Допустим, что интеграл (2) существует (как будет показано ниже). Тогда интегрирование можно выполнить в бесконечных пределах [3]. Так как большинство элементов квазиоптического тракта обладает осевой симметрией, введем цилиндрическую систему координат

$$\begin{aligned} p &= \rho\cos\alpha; & x &= r\cos\beta; \\ q &= \rho\sin\alpha; & y &= r\sin\beta; \\ m &= \sqrt{1-\rho^2}; & z &= z. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как функция $E(r, \beta, z)$ финитна по β, ее можно разложить в ряд по круговым гармоникам [5]

$$E(r, \beta, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m(r, z)\, e^{jm\beta}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2) и выполняя интегрирование по азимутальной координате β, используем выражение

$$\int\limits_0^{2\pi} d\beta\, e^{-jkr\rho\cos(\alpha-\beta)+jm\beta} = 2\pi(-j)^m J_m(kr\rho)\, e^{jm\alpha}, \tag{6}$$

где $J_m(kr\rho)$ — функция Бесселя 1-го рода.

Тогда получим

$$A(p, q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\rho, z)\, e^{jm\alpha}, \tag{7}$$

причем коэффициенты A_m и E_m связаны соотношением

$$A_m = 2\pi(-j)^m e^{-jkz\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_0^{\infty} dr\,r\,J_m(kr\rho)\, E_m(r, z). \tag{8}$$

Так как обычно E_m известны, вычисление интеграла (8) удобно производить при использовании собственных функций преобразования Ганкеля — обобщенных сфероидальных функций [6].

Однако, если учесть, что энергия поля в квазиоптических пучках сосредоточена вблизи оси z, можно упростить вычисления. Действительно, для указанной области обобщенные сфероидальные функции хорошо аппроксимируются произведением функций Гаусса на полиномы Лягерра, которые образуют полную ортогональную систему функций на промежутке $0 \leqslant \rho < \infty - 0 \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$:

$$E_m = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-\frac{u}{2}(1+j\xi)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u^{\frac{m}{2}} L_n^m(u); \tag{9}$$

$$u = \frac{2r^2}{\omega_0^2(1+\xi^2)}; \; \xi = \frac{\lambda(z-z_0)}{\pi\omega_0^2}, \tag{10}$$

где L_n^m — полиномы Лягерра; z_0 — сечение пучка с минимальным сечением пятна ω_0.

Таким образом, мы пришли к известным соотношениям [7], которые часто используются при анализе квазиоптических пучков. В этом случае интеграл (8) вычисляется и, опуская громоздкие выкладки, имеем

$$A_m = e^{-jkz\sqrt{1-\rho^2}} \tilde{u}^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{u}{2}(1-j\xi)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{mn} L_n^m \left(\tilde{u}\right); \tag{11}$$

$$c_{mn} = \frac{\pi(-1)^{m+n}(j)^m \omega_0^2 (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}(m+1)} (1-j\xi)^n}{(1+j\xi)^{m+n+1}}. \tag{12}$$

$$\tilde{u} = \frac{\omega_0^2}{2} k^2 \rho^2.$$

Важно, что аналогично двумерному случаю [1], функция спектральной плотности имеет такую же структуру, как и в основном поле (9). Это позволяет получить ряд полезных соотношений.

1. Из (11) следует, что если основной пучок обладает осевой симметрией ($m = 0$), функция спектральной плотности также осесимметрична.

2. Так же, как и для поля $E(x, y, z)$, можно ввести «спектральный радиус» $\rho_0 = \omega_0$, на котором значение модуля экспоненциального множителя в (11) уменьшится в e раз. Легко показать, что

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{\lambda}{\pi\omega_0}. \tag{13}$$

В отличие от радиуса пятна $\omega = \omega_0\sqrt{1+\xi^2}$ $\tilde{\omega}_0$ не зависит от z и для характерных параметров квазиоптического пучка [7] можно считать, что основная мощность переносится плоскими волнами, направление распространения которых составляет угол с осью z порядка 5°.

3. Несмотря на то, что спектр функции $E(r, z)$ довольно узок, его нельзя считать сосредоточенным в области видимых

углов $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, хотя это и удобно по многим причинам [8]. Поэтому необходимо оценить вклад «медленных волн» [4] при $p^2 + q^2 > 1$ в (1).

Функцию $E(x, y, z)$ всегда можно представить в виде

$$E = E_1 + E_2; \tag{14}$$

$$E_1 = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{p^2+q^2<1} dpdqA(p, q)\, e^{j(\bar{k}\,\bar{r})}; \tag{15}$$

$$E_2 = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{p^2+q^2<1} dpdqA(p, q)\, e^{j(\bar{k}\,\bar{r})}. \tag{16}$$

Оценим по модулю отношение

$$\Delta = \left|\frac{E_2}{E_1}\right|.$$

Для основного типа колебаний TEM_{00} в точках на оси z $(r = 0)$ вклад «медленных волн» ничтожно мал:

$$\Delta = e^{-\pi^2 \frac{\omega_0^2}{\lambda^2}}. \tag{17}$$

На периферии пучка, где основное поле E_1 сильно убывает, E_2 может стать одного порядка с E_1. Однако расстояние от оси r_s, на котором это может произойти, практически не представляет интереса

$$r_s \approx \frac{k}{2}\,\omega_0^2 \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Для колебаний азимутальных типов TEM_{m0} вклад от E_2 пропорционален $m\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2$, где m — номер колебания. В случае, когда $n \neq 0$, на периферии пучка происходит более интенсивная «перекачка» энергии в «медленные волны». Однако эффекты остаются величинами порядка $\frac{\lambda^2}{\omega_0^2}$. Таким образом, вклад «медленных волн» оказывается малой величиной второго порядка по отношению к условиям применимости [3] выражений (1) и (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Канцеленбаум. Высокочастотная электродинамика. Изд-во «Наука», 1966.
2. Р. Б. Ваганов. «Радиотехника и электроника», 14, 1969.
3. E. Lalor JOSA, 58, 9, 1235 (1968).
4. G. Sherman. Phys. Rev. Lett. 21, 11 (1968).
5. Б. М. Минкович, В. П. Яковлев. Теория синтеза антенн. Изд-во «Советское радио», 1969.
6. D. Slepian. BSTJ v. 43. p 3009 (1964).
7. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптики. Физматгиз, 1962.
8. А. Н. Ахиезер. Труды ХГНИИМ, вып. 99 (159), 1969.