К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

С. С. Третьякова

Харьков

В теории дифракции волн, в частности в квазиоптике, широко используется метод параболического уравнения, состоящий в замене исходного уравнения эллиптического типа более простым параболическим уравнением, решения которого хорошо изучены [1—4]. Однако в большинстве задач вопрос об оценке погрешности такой замены остается открытым. В данной работе сделана попытка оценить погрешность метода параболического уравнения в задаче о распространении параксиальных волновых пучков [4].

Будем искать решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0 \tag{1}$$

в виде произведения двух функций, одна из которых является быстро осциллирующей, а вторая — медленно меняющейся функцией координат

$$U = \Psi(x,\ y,\ z)\, e^{-ikz}. \tag{2}$$

Здесь и далее опущен временной множитель $\exp\{i\omega t\}$.

Подставляя (2) в уравнение (1) и ограничиваясь двумерным случаем, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Psi(y,\ z)$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Решение этого уравнения можно найти, если учесть, что $\Psi(y, z)$ — медленно меняющаяся функция координат и

$$\left|\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right| \ll \left|2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|. \qquad (4)$$

Тогда, пренебрегая первым слагаемым в уравнении эллиптического типа (3), переходим к параболическому уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 2ik\frac{\partial\Psi}{\partial z}. \qquad (5)$$

Одним из частных решений уравнения (5) во всем пространстве является решение [4], соответствующее распространяющемуся волновому пучку с распределением поля

$$\hat{\Psi}(y, z) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}}\, H_n\left(y\sqrt{\frac{k}{q_z}}\right) e^{-\frac{ky^2}{2q_z}} e^{-i\frac{ky^2}{2R(z)}} e^{-i\Phi_z}, \qquad (6)$$

где

$$q_z = \frac{\pi}{\lambda} w^2(z); \quad R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z}\right)^2\right];$$

$$w^2(z) = w_0^2\left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right];$$

$$\Phi_z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right);$$

n — число вариаций поля по оси oy;
w_0 — ширина волнового пучка при $z = 0$;
$H_n(x)$ — полиномы Эрмита.

В дальнейшем функцию (6) будем рассматривать как решение параболического уравнения (5) с начальным условием при $z = 0$, задаваемом в виде

$$\hat{\Psi}(y, 0) = e^{-\frac{ky^2}{2q_0}} H_n\left(y\sqrt{\frac{k}{q_0}}\right). \qquad (6')$$

Найдем теперь аналогичное решение уравнения (3), не пользуясь условием (4), т. е. оставаясь в рамках уравнения эллиптического типа. Для этого будем искать функцию $\Psi(y, z)$ в виде

$$\Psi(y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_z(z, \xi)\, e^{-i\xi y} d\xi. \qquad (7)$$

При этом (7) должно удовлетворять принципу погашаемости на бесконечности и определенным граничным условиям. В качестве граничного условия в данном случае потребуем, чтобы при $z = 0$ функция $\Psi(y, z)$, описываемая (7), совпадала со значением $\hat{\Psi}(y, z)$ в точке $z = 0$, т. е.

$$\Psi(y, 0) = \hat{\Psi}(y, 0). \qquad (8)$$

Условие (8) означает, что в дальнейшем будет проводиться исследование одного и того же поля, описываемого с разной степенью точности приближенным уравнением (5) и исходным уравнением (3).

Подставляя (7) в (3), получим уравнение относительно функции $F_z(z, \xi)$

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial F_z}{\partial z} - \xi^2 F_z = 0 \tag{9}$$

и, следовательно,

$$F_z(z, \xi) = C_1(\xi)e^{S_+ z} + C(\xi)e^{S_- z}; \quad s_{\pm} = ik \pm i\sqrt{k^2 - \xi^2}. \tag{10}$$

Здесь подразумевается та ветвь корня, у которой $\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\xi^2} \geqslant 0$. Тогда волне, распространяющейся вдоль оси oz, соответствует $C_1(\xi) = 0$. Константу $C(\xi)$ определим из условия (8). Для этого представим $\hat{\Psi}(y, 0)$ в виде разложения в интеграл Фурье

$$\hat{\Psi}(y, 0) \simeq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_0(\xi)e^{-i\xi y}d\xi, \tag{11}$$

где $F_0(\xi)$ — трансформанта Фурье, которая легко определяется обратным преобразованием

$$F_0(\xi) = i^n\sqrt{\frac{2\pi q_0}{k}}e^{-\frac{\xi^2}{2k}q_0}H_n\left(\xi\sqrt{\frac{q_0}{k}}\right). \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (7) при $z = 0$ с учетом (10), получим

$$F_z|_{z=0} = C(\xi) = F_0(\xi)$$

и

$$\Psi(y, z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_0(\xi)e^{-i\xi y}e^{ikz}e^{-i\sqrt{k^2-\xi^2}z}d\xi, \tag{13}$$

что является точным решением уравнения (3) при граничном условии (8).

Выделим теперь из (13) часть, которая соответствует решению параболического уравнения (6). Для этого интеграл (13) представим в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi, y, z)\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{-k} f(\xi, y, z)\,d\xi + \int\limits_{-k}^{k} f(\xi, y, z)\,d\xi + \int\limits_{k}^{\infty} f(\xi, y, z)\,d\xi$$

и рассмотрим

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k}^{k} F_0(\xi)e^{-i\xi y}e^{ik\left(1-\sqrt{1-\frac{\xi^2}{k^2}}\right)z}d\xi. \tag{14}$$

Используя разложение

$$\sqrt{1-\alpha^2}=1-\frac{\alpha^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_n\alpha^{2n},\quad |\alpha|\leqslant 1,$$

где

$$a_n=\frac{[2(n-2)+1]!!}{(2n)!!},\qquad \alpha=\frac{\xi}{k}$$

и подставляя его в экспоненту (14), получим

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k}F_0(\xi)\,e^{-i\xi y}e^{i\frac{\xi^2}{2k}z}e^{ikz\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n\alpha^{2n}}d\xi. \tag{15}$$

Представим теперь $\exp\left\{ikz\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n\alpha^{2n}\right\}$ в виде ряда

$$e^x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!},\quad x=ikz\sum_{n=2}^{\infty}a_n\alpha^{2n}, \tag{16}$$

что справедливо при произвольных конечных значениях $|z|<L$, где L — любое конечное расстояние от начала координат. Подстановка (16) в (15) дает

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k}F_0(\xi)\,e^{-i\xi y}e^{i\frac{\xi^2}{2k}z},\ d\xi+I_0; \tag{17}$$

$$I_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k}F_0(\xi)\,e^{-i\xi y}e^{i\frac{\xi^2}{2k}z}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(ikz)^m}{m!}\left[\sum_{n=2}^{\infty}a_n\alpha^{2n}\right]^m d\xi.$$

Прибавляя и вычитая в правой части (17) интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{-k}F_0(\xi)\,e^{i\xi y}e^{i\frac{\xi^2}{2k}z}d\xi \text{ и } \int_{k}^{\infty}F_0(\xi)\,e^{-i\xi y}e^{i\frac{\xi^2}{2k}z}d\xi,$$

получим, согласно (13),

$$\Psi(y,\ z)=\Psi_0(y,\ z)+I_0+I_\Sigma, \tag{18}$$

где

$$\Psi_0(y,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_0(\xi)\,e^{-i\xi y}e^{i\frac{\xi^2}{2k}z}d\xi; \tag{19}$$

$$I_\Sigma=I_1+I_2; \tag{20}$$

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_{k}^{\infty}F_0(\xi)\,e^{-i\xi y}\left[e^{ikz}e^{-kz\sqrt{\frac{\xi^2}{k^2}-1}}-e^{i\frac{\xi^2}{2k}z}\right]d\xi;$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-k}F_0(\xi)\,e^{-i\xi y}\left[e^{ikz}e^{-kz\sqrt{\frac{\xi^2}{k^2}-1}}-e^{i\frac{\xi^2}{2k}z}\right]d\xi.$$

Рассмотрим функцию $\Psi_0(y, z)$. Подставляя в (19) выражение для $F_0(\xi)$ из (12) и преобразуя соответствующим образом подынтегральную функцию, получим выражение для $\Psi_0(y, z)$, в точности совпадающее с выражением (6) для $\hat{\Psi}(y, z)$, — решения параболического уравнения

$$\Psi_0(y, z) = \hat{\Psi}(y, z).$$

Таким образом, согласно (17), решение исходного уравнения эллиптического типа (3) может быть представлено в виде суммы, состоящей из решения параболического уравнения (5) плюс слагаемые I_0 и I_Σ, которые определяют погрешность решения, вызванную отбрасыванием слагаемого $\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$ в точном уравнении.

Произведем теперь оценку этой погрешности и выясним условия, при которых она мала.

Для оценки воспользуемся известным неравенством [5]

$$|H_n(x)| \leqslant 2^{\frac{n}{2} - E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n!}{\left[E\left(\frac{n}{2}\right)\right]!} e^{2x\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}}, \quad (x > 0), \tag{21}$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ — целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Произведем оценку I_0

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-k}^{k} F_0(\xi)\, e^{-i\xi y} e^{i\frac{\xi^2}{2k}z} \sum_{m=1}^{\infty} (ikz)^m \frac{\left[\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{\xi}{k}\right)^{2n}\right]^m}{m!}\, d\xi.$$

Поскольку $\left|\frac{\xi}{k}\right| \leqslant 1$, то $S = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{\xi}{k}\right)^{2n}$ — сходящийся ряд и

$$S = \alpha^4 a_2 [1 + O(\alpha^2)], \quad \alpha = \frac{\xi}{k}$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (ikz)^m \frac{S^m}{m!} = e^{ikz\frac{S}{2}} 2i \sin kz\frac{S}{2}$$

и, следовательно,

$$|I_0| \leqslant \frac{k}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} |F_0(\alpha)|\left|e^{-ik\alpha y} e^{ikz\frac{\alpha^2}{2}[1 + a_2\alpha^2(1 + O(\alpha^2))]}\right| \left|\sin kz\frac{S}{2}\right| d\alpha.$$

Так как $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$,
то

$$0 < \left|\sin kz\frac{S}{2}\right| \leqslant |\sin kzb|, \quad b = a_2\frac{1 + O(1)}{2},$$

и, учитывая (12) и (20), имеем

$$|I_0| \leqslant |\sin kzb| \sqrt{\frac{2kq_0}{\pi}} C_1(n) \int_{-1}^{1} e^{-\frac{\alpha^2}{2}kq_0} e^{\mu_n \alpha \sqrt{kq_0}} d\alpha, \tag{22}$$

где

$$C_1(n) = 2^{\frac{n}{2} - E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n!}{\left[E\left(\frac{n}{2}\right)\right]!}, \quad \mu_n = 2\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Преобразуя интеграл (22) и используя известные формулы [5], получим при условии

$$\frac{2\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{kq_0} < 1, \tag{23}$$

$$|I_0| \leqslant C_1(n) |\sin kbz| e^{\frac{\mu_n^2}{2}} \left\{ \Phi\left[\sqrt{\frac{kq_0}{2}}\left(1 - \frac{\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \Phi\left[\sqrt{\frac{kq_0}{2}}\left(1 + \frac{\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right)\right]\right\},$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Данная оценка справедлива для любых значений параметра kq_0, удовлетворяющего условию (23). Упростим ее применительно к квазиоптическому приближению, где этот параметр велик

$$kq_0 = 2\pi^2 \frac{w_0^2}{\lambda^2} \gg 1,$$

так как ширина волнового пучка всегда значительно превышает длину волны. Благодаря этому можно воспользоваться асимптотическим разложением интеграла вероятности при большом аргументе, удерживая в нем первый член. Это дает

$$|I_0| \sim 2C_1(n) |\sin kzb| e^{\frac{\mu_n^2}{2}} - 2C_1(n) \sqrt{\frac{kq_0}{2\pi}} |\sin kzb| \times$$

$$\times \frac{e^{-\frac{kq_0}{2}\left(1 - \frac{2\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right)}}{kq_0 - \mu_n \sqrt{kq_0}} \qquad (n \neq 0); \tag{24}$$

$$|I_0| \sim 2|\sin kzb| \left[1 - \sqrt{\frac{2}{\pi kq_0}} e^{-\frac{kq_0}{2}}\right], \quad (n = 0).$$

Аналогичным образом производится оценка остальных интегралов. Приведем здесь лишь конечные результаты.

$$|I_1| \leqslant C_1(n) \sqrt{\frac{kq_0}{2\pi}}\, e^{-\frac{kq_0}{2}\left(1-\frac{2\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right)} \times$$

$$\times \frac{kz}{\left(kz+kq_0-\mu_n\sqrt{kq_0}\right)\left(kq_0-\mu_n\sqrt{kq_0}\right)}; \qquad (25)$$

$$|I_2| \leqslant C_1(n) \sqrt{\frac{kq_0}{2\pi}}\, e^{-\frac{kq_0}{2}\left(1+\frac{2\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right)} \times$$

$$\times \frac{kz}{\left(kz+kq_0+\mu_n\sqrt{kq_0}\right)\left(kq_0+\mu_n\sqrt{kq_0}\right)}. \qquad (26)$$

Окончательная оценка поправочного слагаемого

$$\Delta = I_0 + I_\Sigma,$$

определяющего различие между решением исходного точного уравнения (3) и соответствующего ему параболического уравнения, имеет вид

$$|\Delta| \sim 2C_1(n)\,|\sin kzb|\, e^{\frac{\mu_n^2}{2}} - \frac{C_1(n)}{\sqrt{2\pi kq_0}} \cdot \frac{e^{-\frac{kq_0}{2}\left(1-\frac{2\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right)}}{1-\frac{\mu_n}{\sqrt{kq_0}}} \times$$

$$\times \left\{2\,|\sin kzb| - \frac{kz}{kz+kq_0-\mu_n\sqrt{kq_0}}\right\}, \quad (n \neq 0); \qquad (27)$$

$$|\Delta| \sim 2\,|\sin kzb| - \sqrt{\frac{2}{\pi kq_0}}\, e^{-\frac{kq_0}{2}}\left[2\,|\sin kzb| - \frac{kz}{kz+kq_0}\right], (n = 0). \qquad (28)$$

Как следует из формул (27)—(28), погрешность решения методом параболического уравнения существенно зависит от номера типа колебаний n. С возрастанием n величина поправочного слагаемого Δ экспоненциально растет.

Зависимость $|\Delta|$ от z имеет характер осциллирующей функции $|\sin kzb|$ плюс некоторая функция, асимптотически стремящаяся к константе при $z \to \infty$. При $z = 0$ поправка обращается в нуль.

Полученная оценка (27), (28) для квазиоптического приближения тем точнее, чем больше величина kq_0, т. е. чем меньше длина волны по сравнению с шириной пятна волнового пучка. Для произвольного значения параметра kq_0 оценка погрешности решения, вызванная заменой уравнения эллиптического типа соответствующим ему параболическим уравнением, имеет такой вид

$$|\Delta| \leqslant C_1(n)\left\{\pi e^{-\frac{kq_0}{2}} \sum_{s=1}^{4} (-1)^{s+1}[1-\Phi(x_s)]\, e^{x_s^2 \pm \mu_n \sqrt{kq_0}} + \right.$$

$$\left. + |\sin kzb|\, e^{\frac{\mu_n^2}{2}} [\Phi(\nu_1 + \Phi(\nu_2)]; \right.$$

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{2kq_0}} z_s; \qquad z_1 = kz + kq_0 - \mu_n \sqrt{kq_0};$$

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{kq_0}{2}}\left(1 - \frac{\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right); \quad z_2 = kq_0 - \mu_n \sqrt{kq_0};$$

$$z_3 = kz + kq_0 + \mu_n \sqrt{kq_0};$$

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{kq_0}{2}}\left(1 + \frac{\mu_n}{\sqrt{kq_0}}\right); \quad z_4 = kq_0 + \mu_n \sqrt{kq_0}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Изд-во «Советское радио», 1966.
2. Л. А. Вайнштейн. 1 Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, Паланга, 1965.
3. В. А. Фок. 1 Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, Паланга, 1965.
4. Когельник, Ли. «Зарубежная радиоэлектроника», 1967, № 3.
5. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.