О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

А. А. Кириленко, С. А. Масалов

Харьков

При решении многих задач математической физики, особенно задач теории дифракции, часто используется метод Винера-Хопфа. В простейших случаях окончательное решение получается в замкнутом виде, требующем все же вычисления некоторых бесконечных произведений $\Pi(w)$ при получении конкретных численных результатов. Чаще всего эти бесконечные произведения оказываются слабо сходящимися и вследствие этого мало пригодными для прямых численных расчетов.

Основным параметром обычно является некоторая величина $\varkappa$, определяемая, например, в задачах дифракции как отношение характерного размера препятствия l к длине волны падающего поля λ: $\varkappa = \frac{l}{\lambda}$. В предельных случаях $\varkappa \ll 1$ или $\varkappa \gg 1$ получающиеся бесконечные произведения с точностью, возрастающей при $\varkappa \to 0$ или $\varkappa \to \infty$, удается аппроксимировать другими функциями w, более удобными для вычислений [1—3]. Это позволило детально исследовать целый ряд важных для практики задач электродинамики.

В последнее время все большее внимание уделяется решению задач дифракции, связанных с модифицированными структурами типа Винера—Хопфа. Это задачи дифракции на таких препятствиях, основным элементом геометрии которых является одна из структур, допускающих решение задачи дифракции методом Винера—Хопфа в замкнутом виде. Методы решения подобных задач могут быть самыми различными [4—7], однако во всех случаях задача сводится к отысканию решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с коэффициентами в виде бесконечных произведений. Существенно то, что возникает необходимость вычисления этих произведений с высокой степенью точности при $\varkappa$ и w, сравнимых с единицей.

В любом из известных методов решения задач дифракции, связанных с модифицированными структурами типа Винера-Хопфа, используется либо в явной форме [4], либо завуалировано [5—7] то обстоятельство, что исходная структура является наложением нескольких простейших неоднородностей. Во взаимодействии между ними требуется учитывать определенное число распространяющихся или затухающих дифракционных гармоник, что в конечном счете и приводит к необходимости вычисления бесконечных произведений при $\varkappa \sim 1$ и $|w| \sim 1$.

Надо отметить, что некоторые авторы [8] непосредственно вычисляют слабо сходящиеся произведения без какого-либо улучшения сходимости. При рассмотрении простейших неоднородностей, когда для получения основных характеристик рассеянного поля требуется подсчет лишь нескольких произведений, это оправдано. При расчете сложной структуры, особенно при нулевом расстоянии между элементарными неоднородностями, затраты машинного времени при прямом подсчете произведений с достаточной степенью точности оказываются неоправданно большими.

Цель настоящей работы — анализ сходимости основных типов бесконечных произведений, встречающихся при решении задач дифракции методом Винера-Хопфа; получение поправок, обеспечивающих высокую сходимость алгоритма, и иллюстрация их эффективности.

Метод, используемый в данной статье, заключается в последовательном выделении из общих членов бесконечных произведений членов с низкими степенями $\frac{1}{m}$, вызывающих медленную сходимость (m — индекс суммирования). Так как суммы выделенных степеней заранее известны, отбрасываемая бесконечная часть произведения заменяется некоторым поправочным множителем.

Рассматриваемые произведения обычно имеют вид

$$\Pi(w) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta_m - w)(\gamma_m - w)}{(\alpha_m - w)} f_m,$$

где α_m, β_m и γ_m — постоянные распространения некоторых волн в системе; w — постоянная распространения падающей или дифрагированной волны; f_m — множитель, не зависящий от $\varkappa$ и обеспечивающий абсолютную и равномерную сходимость произведения.

Все произведения могут быть разбиты на две группы. В первую входят произведения с α_m, β_m, γ_m и w такими, которые в зависимости от номера m или параметров задачи могут быть либо чисто реальными, либо чисто мнимыми величинами. Ко второй группе относятся произведения, где одна из постоянных распространения с ростом m становится величиной с отличными от нуля и реальной, и мнимой частями; такого рода произведения встречаются в задачах дифракции волн на решетке из наклонных полуплоскостей и в задачах с импедансными граничными условиями.

Наиболее характерные отличия произведений следующие. В произведениях первой группы фаза произведения сходится лучше, чем модуль, в то время как в произведениях второй группы они в общем случае сходятся одинаково. Если произведения первой группы как функции w имеют алгебраическое поведение при $|w| \to \infty$, то произведения второй группы в зависимости от $\arg w$ могут иметь экспоненциальный рост на бесконечности.

Рассмотрим произведение первой группы, возникающее в задачах о волноводных неоднородностях:

$$\Pi(w) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta_m - w)(\gamma_m - w)\,\Theta(1-\Theta)}{(\alpha_m - w)\,im}, \tag{1}$$

где

$$\alpha_m = \sqrt{\varkappa^2 - m^2}, \quad \beta_m = \sqrt{\varkappa^2 - \left(\frac{m}{\Theta}\right)^2}, \quad \gamma_m = \sqrt{\varkappa^2 - \left(\frac{m}{1-\Theta}\right)^2},$$

$0 < \theta < 1$ — величина, определяемая геометрией неоднородности.

Из представления

$$\Pi(w) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \ln \frac{(\beta_m - w)(\gamma_m - w)\,\Theta(1-\Theta)}{(\alpha_m - w)\,im}\right\} \tag{2}$$

следует, что скорость сходимости произведения определяется скоростью сходимости ряда в (2), т. е. поведением логарифма общего члена произведения при $m \gg 1$. Разложим каждое слагаемое в (2) при больших m по степеням $\left(\frac{1}{m}\right)$ в ряд Тейлора

$$\ln \frac{(\beta_m - w)(\gamma_m - w)\,\Theta(1-\Theta)}{(\alpha_m - w)\,im} = \sum_{j=2}^{4} \Delta_j \frac{1}{m^j} + 0\left(\frac{w^5}{m^5}, \frac{\varkappa^5}{m^5}\right), \tag{3}$$

где

$$\Delta_2 = \theta(1-\theta)(w^2 - \varkappa^2), \quad \Delta_3 = iw\theta(1-\theta)\left(\frac{3}{2}\varkappa^2 - w^2\right),$$

$$\Delta_4 = \frac{\Theta(1-\Theta)}{2}(4 - \theta + \theta^2)(\varkappa^2 - w^2)^2.$$

При вычислении величин Δ_i необходимо находить высокие производные по z от величин типа $\ln\left(\sqrt{1-(\varkappa\theta z)^2} + iw\theta z\right)$, что приводит обычно к достаточно сложным промежуточным выкладкам. Первые члены разложения (3) можно получить проще, пользуясь единственностью разложения в ряд по $\left(\frac{1}{m}\right)$ и используя разложения в ряды функций $\sqrt{1+x}$ и $\ln(1+x)$ при малых x, а также собирая в окончательных разложениях величины при одинаковых степенях $\left(\frac{1}{m}\right)$. Из (3) следует, что сходимость модуля бесконечного произведения (1) определяется сходимостью ряда

$\sum\limits_m \frac{1}{m^2}$, а фаза (1) определяется сходимостью ряда $\sum\limits_m \frac{1}{m^3}$. Это значит, что при непосредственном вычислении мы всегда будем иметь фазу, вычисленную с большей точностью, чем модуль. При этом относительная погрешность ε_1 вычисления модуля бесконечного произведения — $\varepsilon_1 \leqslant \exp\left(\frac{\Delta_2}{R}\right) - 1$, а абсолютная погрешность ε_2 вычисления фазы (1) — $\varepsilon_2 \leqslant \frac{\Delta_3}{R^2}$. Как видим, для достижения хорошей точности при нахождении (1) необходимо учитывать значительное количество сомножителей в бесконечном произведении.

Другой путь состоит в представлении (1) следующим образом:

$$\Pi(w) = \prod_{m=1}^{R} \frac{(\beta_m - w)(\gamma_m - w)\,\Theta(1-\Theta)}{(\alpha_m - w)\,im} \exp\left\{\Delta_2\left[\zeta(2) - \sum_{m=1}^{R}\frac{1}{m^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \Delta_3\left[\zeta(3) - \sum_{m=1}^{R}\frac{1}{m^3}\right] + \Delta_4\left[\zeta(4) - \sum_{m=1}^{R}\frac{1}{m^4}\right] + 0\left(\frac{w^5}{R^4}, \frac{\varkappa^5}{R^4}\right)\right\}. \qquad (4)$$

В этом представлении использованы разложение (3) и дзета-функция Римана

$$\zeta(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^z};\ \zeta(2) = 1{,}64493407;\ \zeta(3) = 1{,}20205690;$$
$$\zeta(4) = 1{,}08232323.$$

Вычислив конечное произведение из R сомножителей и поправочный множитель в виде экспоненты от некоторых простейших выражений, получим исходное произведение с погрешностью, определяемой величиной

$$\exp\left[0\left(\frac{w^5}{R^4}, \frac{\varkappa^5}{R^4}\right)\right].$$

Введение поправочного множителя позволяет при фиксированной точности вычислений исходного произведения в десятки раз сократить затраты машинного времени и, кроме того, избежать значительных машинных ошибок при округлениях. Следует заметить, что в ряде задач $|w|$ и $\varkappa$ могут принимать довольно большие значения, что приводит к требованию соответствующего увеличения R.

Рассмотрим теперь бесконечное произведение второй группы, возникающее в задачах дифракции волн на решетке из наклонных полуплоскостей:

$$\Pi(w) = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(\Gamma_m^+ - w)(\Gamma_{-m}^+ - w)}{(\omega_m - w)\,2\,im\cos\psi}, \qquad (5)$$

где

$$\omega_m = \sqrt{\varkappa^2 - \left(\frac{m}{2\cos\psi}\right)^2}, \quad \Gamma_m^{+} = \sqrt{\varkappa^2 - (m + \varkappa\sin\varphi)^2}\cos\psi + (m + \varkappa\sin\varphi)\sin\psi.$$

Здесь углы φ и ψ соответственно связаны с падающей волной и геометрией структуры. Из представления

$$\Pi(w) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \ln\frac{(\Gamma_m^{+} - w)(\Gamma_{-m}^{+} - w)}{(\omega_m - w)\, 2\, im\cos\psi}\right\}$$

и разложения

$$\ln\frac{(\Gamma_m^{+} - w)(\Gamma_{-m}^{+} - w)}{(\omega_m - w)\, 2im\cos\psi} = \sum_{j=2}^{4}\frac{\Delta_j}{mi} + 0\left(\frac{w^5}{m^5}, \frac{\varkappa^5}{m^5}\right),$$

где

$$\Delta_2 = -2(w^2 - \varkappa^2)\cos^2\psi + \left[(w_1^2 - \Phi^2\cos^2\psi)\cos 2\psi - \varkappa^2\cos^2\psi + 2w_1\psi\cos\psi\sin 2\psi\right], \quad \Delta_3 = 4iw\left(\frac{2}{3}w^2 - \varkappa^2\right)\cos^3\psi + i\,[\Phi\varkappa^2(1 + 2\cos^2\psi)\sin\psi\cos\psi + w_1(\varkappa^2\cos\psi\sin 2\psi + 2\Phi^2\cos^2\psi\cos 3\psi) + \frac{2}{3}\Phi^3\cos^3\psi\sin 3\psi - 2\Phi w_1^2\cos\psi\sin 3\psi - \frac{2}{3}w_1^3\cos 3\psi];$$

$$\Delta_4 = -4(w^2 - \varkappa^2)^2\cos^4\psi + [\Phi\varkappa^2 w_1 4\cos^3\psi\sin 2\psi - \varkappa^2(\varkappa^2 + 2\Phi^2)\cos^3\psi + (\Phi^2\cos^2\psi - w_1^2)(2\Phi w_1\cos\psi\sin 4\psi - \varkappa^2\cos\psi\cos 3\psi) - \frac{1}{2}(\Phi^4\cos^4\psi + w_1^4 - 6w_1^2\Phi^2\cos^2\psi)\cos 4\psi];$$

$$w_1 = w - \Phi\sin\psi, \quad \Phi = \varkappa\sin\varphi,$$

следует, что модуль (5) сходится подобно модулю в (1), а скорость сходимости фазы при w вещественном определяется скоростью сходимости ряда $\sum\limits_m \frac{1}{m^3}$ и при w комплексном — ряда $\sum\limits_m \frac{1}{m^2}$. Следовательно, при вычислении (5) необходимо использовать представление, аналогичное (4).

Одной из особенностей (5) является следующее: при некоторых значениях $\arg w$ произведение имеет экспоненциальный рост на бесконечности. При этом перед произведением обычно стоит соответствующая экспоненциальная функция w, компенсирующая рост на бесконечности. При составлении алгоритма расчетов необходимо учитывать этот факт и вводить масштабирующие множители в каждый член произведения либо равномерно, либо по какому-то определенному закону, чтобы избежать переполнения разрядной сетки ЭВМ или значительных ошибок за счет округления и нормализации.

Заметим, что поправочные множители, учитывающие более высокие степени $\frac{1}{m}$ в разложении (3), имеют достаточно громоздкий вид. Введение их приводит к неоправданно большому увеличению размера места, занимаемого программой в оперативной памяти ЭВМ.

Таблица сходимости

R	Без поправок	Δ_2	Δ_2, Δ_3	Δ_2, Δ_3, Δ_4
10	$\lvert A\rvert = 0{,}1552261$	0,1364785	0,1376371	0,1376378
	$\alpha = 107{,}3624°$	104,5058°	104,5883°	104,5884°
20	0,1468480	0,1369272	0,1372318	0,1372319
	105,9922°	104,5283°	104,5500°	104,5500°
40	0,1421492	0,1370447	0,1371228	0,1371228
	105,2754°	104,5343°	104,5398°	104,5398°
80	0,1396639	0,1370748	0,1370945	0,1370945
	104,9086°	104,5358°	104,5372°	104,5372°
160	0,1383863	0,1370824	0,1370873	0,1370873
	104,7232°	104,5362°	104,5365°	104,5365°
2560	0,1371670	0,1370849	0,1370849	0,1370849
	104,5480°	104,5363°	104,5363°	104,5363°

Для иллюстрации эффективности рассматриваемого алгоритма приведем сравнительные данные вычисления одного произведения второй группы с поправочными множителями и без них. На таблице представлены модуль (верхние строки) и фаза величины

$$A = |A|\, e^{i\alpha} = -\exp\left\{i\left[\Gamma^{\pm}_{-1} + \varkappa\cos(\varphi+\psi)\right] t(\psi)\right\} \frac{\varkappa\left(\omega_1 - \Gamma^{\pm}_{-1}\right) \times}{\left(\Gamma^{+}_{0} - \Gamma^{\pm}_{-1}\right) \times}$$

$$\frac{\times\left(\Gamma^{+}_{1} + \varkappa\cos\psi\right)\cos\psi}{\times\left(\omega_1 + \varkappa\cos\psi\right)\left(\Gamma^{+}_{1} - \Gamma^{\pm}_{-1}\right)} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{\left(\omega_m - \Gamma^{\pm}_{-1}\right)\left(\Gamma^{+}_{m} + \varkappa\cos\psi\right)\left(\Gamma^{\pm}_{-m} + \varkappa\cos\psi\right)}{\left(\omega_m + \varkappa\cos\psi\right)\left(\Gamma^{+}_{m} - \Gamma^{\pm}_{-1}\right)\left(\Gamma^{\pm}_{-m} - \Gamma^{\pm}_{-1}\right)}$$

при $\varkappa = 0{,}8$; $\varphi = 0°$; $\psi = 60°$ для различных значений R и числа учитываемых поправок Δ_j. Здесь $t(\psi) = 2\left[\cos\psi \ln(2\cos\psi) + \psi\sin\psi\right]$. Из таблицы следует, что при данных параметрах относительная погрешность вычисления порядка 10^{-4} достигается уже при $R = 80$ для модуля и $R = 40$ для фазы даже при учете поправки с Δ_2. Точность на порядок хуже при непосредственном вычислении достигается лишь при учете нескольких тысяч членов произведения. Влияние поправочных членов с Δ_3 и Δ_4 в приведенном примере невелико, поскольку величины $|w|$ и $\varkappa$ относительно малы. Подчеркнем, что влияние членов с Δ_3 и Δ_4 существенно возрастает при больших $\varkappa$ и $|w|$. Например, если в A положить $\varkappa = 3{,}3$ и вместо $\Gamma^{\pm}_{-1}$ поставить Γ^{+}_{6}, относительная точность порядка 10^{-4} с учетом всех поправок будет достигнута только при $R = 300$, а при учете только члена с Δ_2 — при $R = 600$.

Авторы признательны В. В. Щербаку за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации. Изд-во «Советское радио», 1966.

2. R. Hurd. Canadian journ. of Ph. 32, N 12, 1954.

3. Laxpaty, Mittra, Can. journ. of Ph. 43, N 2, 1965.

4. I. Pace, R. Mittra. Proc. Symp. Quasioptics, Polit. Inst. of Brooklyn, 177—197, 1964.

5. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский. Электромагнитное возбуждение периодической решетчатой структуры из проводящих лент. Р и Э, 1969, XIV, 5, 839—850.

6. R. Mittra, S. Lu, I. Van Blaricum. Intern. Inst. Engrng. Sci, 6, 7, 395—408, 1968.

7. В. Е. Буданов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, В. П. Шестопалов. Дифракция волн на решетках типа «жалюзи» и эшелетт. Докл. на симпозиуме по дифракции волн. Ленинград, 1970.

8. С. В. Бутакова. Особенности расчета на ЭВМ матрицы рассеяния разветвления прямоугольных волноводов в H-плоскости. Сб. «Антенны», вып. 8. Изд-во «Связь», 1970.