О РЕШЕНИИ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, В. К. Ярмолюк

Харьков

В работах [1—3] рассматривалось применение R-функций в сочетании с вариационными методами к решению внутренних задач электростатики. Формулируемые для этих задач вариационные принципы [5] можно непосредственно распространить на поля в неограниченной области, подчинив их лишь условиям на бесконечности. Они, как и плоские ограниченные поля, допускают построение полной системы координатных функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям и условиям на бесконечности. Такую систему для сложных границ можно построить с помощью метода R-функций. Тогда, согласно схеме Галеркина—Ритца, задача сведется к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Настоящая работа посвящена применению аппарата R-функций к решению внешней задачи электростатики для областей сложной формы. На примере расчета полей в электростатических линзах иллюстрируется применимость данной методики для практических целей.

Рассмотрим систему $n-1$ плоских проводящих пластин толщиной $b_{2i-1}-b_{2i-2}$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ с отверстиями радиуса a, расположенных друг от друга на расстоянии $b_{2i-2}-b_{2i-3}$ $(i=3, 4, \ldots, n)$ и помещенных между двумя параллельными проводящими плоскостями, расстояние между которыми b_{2n}. На каждом из электродов поддерживаются постоянные потенциалы, равные соответственно V_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ (рис. 1). Фокусирующие свойства такой линзы выражаются через поле на оси симметрии.

В частном случае для данной задачи при $n=2$ Рамо и Уиннери [4] удалось получить решение при выполнении граничных условий только в четырех точках, что не позволяет найти решения, достаточно близкого (с точки зрения эксперимента) к точному.

Рассматриваемая задача в общем случае может быть сформулирована следующим образом: построить функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

и граничным условиям

$$\varphi\,|_{\omega_{2i}=0}=V_i \quad (i=1, 2, \ldots, n+1), \qquad (2)$$

где $\omega_{2i-1}=0$ — уравнение границ, на которых поддерживаются постоянные потенциалы.

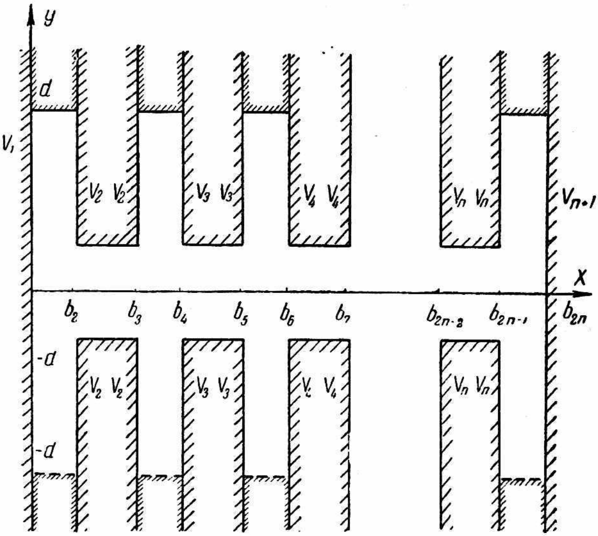

Рис. 1.

Построение этих уравнений достигается с помощью операции R-конъюнкции [3], которая в элементарном виде записывается так:

$$X \wedge_\alpha Y = \frac{1}{2}(X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2 - 2\alpha XY} \quad (-1 < \alpha \leqslant 1); \tag{3}$$

$$\omega_1 = f_1;$$

$$\omega_3 = -[(-f_2 f_3) \wedge_\alpha f_{2n+1}];$$

$$\omega_5 = -[(-f_4 f_5) \wedge_\alpha f_{2n+1}];$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_{2n-1} = -[(-f_{2n-2} \cdot f_{2n-1}) \wedge_\alpha f_{2n+1}];$$

$$\omega_{2n} = -[(-f_{2n-2} \cdot f_{2n-1}) \wedge_\alpha f_{2n+1}],$$

где $f_1 = x \geqslant 0;$ $\quad f_2 = (b_2 - x) \geqslant 0;$

$f_3 = (b_3 - x) \geqslant 0;$ $\quad f_4 = (b_4 - x) \geqslant 0;$

$f_{2n-2} = (b_{2n-2} - x) \geqslant 0;$ $\quad f_{2n+1} = (y^2 - a^2) \geqslant 0;$

$f_{2n-1} = (b_{2n-1} - x) \geqslant 0;$ $\quad f_{2n+2} = (y^2 - d^2) \geqslant 0.$ (4)

$f_{2n} = (b_{2n} - x) \geqslant 0;$

В данной задаче все $n - 1$ плоские проводящие пластины предполагаются полубесконечными. Тогда на значительном расстоянии от оси симметрии потенциал должен удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi_{\substack{y=\pm d \\ 0\leqslant x\leqslant b_2}} = \frac{(V_2 - V_1)}{b_2} x + V_1 = \psi_1 (x, V_1, V_2);$$

$$\varphi \Big|_{\substack{y=\pm d \\ b_3\leqslant x\leqslant b_4}} = \frac{(V_2 - V_1)}{b_3 - b_4} x + \frac{b_3 V_3 - b_4 V_2}{b_3 - b_4} = \psi_2 (x, V_2, V_3); \tag{5}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi \Big|_{\substack{y=\pm d \\ b_{2n-1}\leqslant x\leqslant b_{2n}}} = \frac{(V_n - V_{n+1})}{b_{2n-1} - b_{2n}} x + \frac{V_{n+1} b_{2n-1} - b_{2n} V_n}{b_{2n-1} - b_{2n}} = \psi_n (x_1 V_n V_{n+1}).$$

Не изменяя общности поставленной задачи, введем скользящие границы $\omega_{2i}(x, y) = 0$. Величина параметра скольжения d должна быть выбрана из следующих соображений. Главным образом нас интересует поле на оси симметрии, поэтому необходимо, чтобы взаимное влияние окрестностей границ ω_{2i} и оси симметрии было пренебрежимо мало. При этом условии отбрасываемая часть области вне границ $\omega_{2i} = 0$ практически не участвует в формировании поля на оси симметрии, что также значительно облегчает приближенное интегрирование по области.

Тогда условия (5) примут вид

$$\psi \,|_{\omega_{2i}=0} = \psi_i (x, V_{i-1}, V_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\,[(f_1 f_2) \wedge_\alpha f_{2n+2}]; \\ \omega_4 &= -\,[(-f_3 f_4) \wedge_\alpha f_{2n+2}]; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \omega_{2n} &= -\,[(-f_{2n-1} f_{2n}) \wedge_\alpha f_{2n+2}]. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к отысканию решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2) и (6).

Согласно [1], решение краевой задачи будем искать в виде

$$\varphi (x, y) = \varphi_0 (x, y) + \omega (x, y) \sum_{i=1}^{p} C_i \chi_i (x, y), \tag{8}$$

где χ_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ — некоторая полная система функций [5].

Для внешних краевых задач электростатики в качестве такой системы функций введем последовательность

$$\left\{ \frac{x^k y^s}{(1+\omega)^{\frac{k+s+l}{m}}} \right\} \quad \begin{aligned} &(k + s = 0, 1, \dots, p), \\ &(k, s \geqslant 0), \end{aligned} \tag{9}$$

где m — степень функции $\omega(x, y)$, а l — показатель степени, характеризующий скорость спада искомой функции на бесконечности. В соответствии с физической сущностью изучаемого явления для данного случая $l = 1$.

Можно проверить, что функция

$$\varphi(x, y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{V_i}{\omega_{2i-1}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\psi_i(x, V_{i-1} V_i)}{\omega_{2i}}}{\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{\omega_i}} + \omega \sum_{\substack{k+s=0 \\ k,\, s \geq 0}}^{p} C_{ks} \frac{x^k y^s}{(1+\omega)^{\frac{m+k+s+l}{m}}} \tag{10}$$

независимо от выбора постоянных C_{ks} точно удовлетворяет условиям (2) и (6). Эти постоянные должны быть подобраны так, чтобы наилучшим образом удовлетворить уравнению Лапласа.

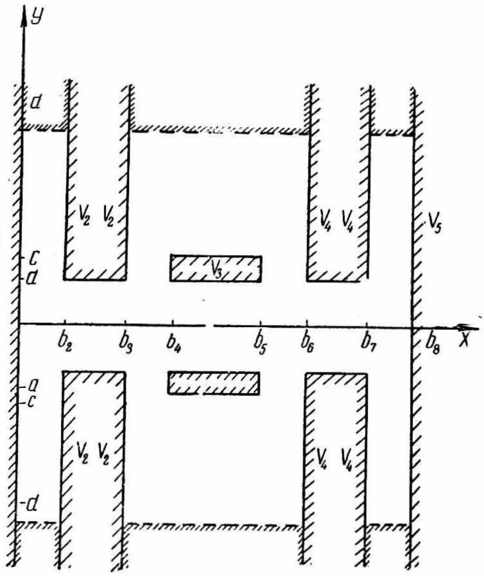

Рис. 2.

Для этого можно воспользоваться процедурой Галеркина — Ритца.

Для данной задачи функция $\omega(x, y)$ имеет следующий вид:

$$\omega = (f_1 f_{2n}) \{-[(-f_2 f_3) \wedge_\alpha f_{2n+1}]\} \{-[(-f_4 f_5) \wedge_\alpha f_{2n+1}]\} \times$$
$$\times \{-[(-f_6 f_7) \wedge_\alpha f_{2n+1}]\} \dots \{-[(-f_{2n-2} f_{2n-1}) \wedge_\alpha f_{2n+1}]\}. \tag{11}$$

В качестве примера рассмотрим задачу определения поля в электростатической линзе [6], изображенной на рис. 2.

Краевые условия для данной задачи представятся в виде

$$\varphi|_{\omega_1=0} = V_1; \quad \varphi|_{\omega_2=0} = \psi_1(x, V_1, V_2); \quad \varphi|_{\omega_3=0} = V_2;$$
$$\varphi|_{\omega_4=0} = V_3; \quad \varphi|_{\omega_5=0} = \psi_2(x, V_2, V_4); \quad \varphi|_{\omega_6=0} = V_4;$$

$$\varphi|_{\omega_7=0} = \psi_3(x, V_4, V_5); \quad \varphi|_{\omega_8=0} = V_5, \tag{12}$$

где

$$\omega_1 = f_1; \quad \omega_2 = -[(f_1 f_2) \wedge_\alpha f_{10}]; \quad \omega_3 = -[(-f_2 f_3) \wedge_\alpha f_9];$$
$$\omega_4 = -[(f_9 \wedge_\alpha f_{11}) \wedge_\alpha (-f_4 \wedge_\alpha f_5)]; \quad \omega_5 = -[(-f_3 f_6) \wedge_\alpha f_{10}];$$
$$\omega_6 = -[(-f_6 f_7) \wedge_\alpha f_9]; \quad \omega_7 = -[(-f_7 f_8) \wedge_\alpha f_{10}] \tag{13}$$

и

$$f_1 = x \geqslant 0; \quad f_2 = b_2 - x \geqslant 0; \quad f_3 = b_3 - x \geqslant 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_8 = b_8 - x \geqslant 0; \quad f_9 = y^2 - a^2 \geqslant 0; \quad f_{10} = y^2 - d^2 \geqslant 0;$$
$$f_{11} = c^2 - y^2 \geqslant 0; \quad \psi_1(x, V_1, V_2) = \frac{(V_2 - V_1)}{b_2} x + V_1;$$
$$\psi_2(x, V_2, V_4) = \frac{(V_2 - V_4)}{b_3 - b_6} x + \frac{b_3 V_4 - b_6 V_2}{b_3 - b_6};$$
$$\psi_3(x, V_4, V_5) = \frac{(V_4 - V_5)}{b_7 - b_8} x + \frac{b_7 V_5 - b_8 V_4}{b_7 - b_8}. \tag{14}$$

Функция $\omega(x, y)$ в данном случае имеет следующий вид:

$$\omega = (f_1 f_8)\{-[(-f_2 f_3) \wedge_\alpha f_9\}\{-[(f_9 \wedge_\alpha f_{11}) \wedge_\alpha (-f_4 \wedge_\alpha f_5)]\} \times$$
$$\times \{-[(-f_6 f_7) \wedge_\alpha f_9]\}. \tag{15}$$

Аналогично можно проверить, что функция

$$\varphi(x, y) = \frac{\frac{V_1}{\omega_1} + \frac{V_2}{\omega_2} + \frac{V_3}{\omega_4} + \frac{V_4}{\omega_6} + \frac{V_8}{\omega_8} + \frac{f_1(x; V_1, V_2)}{\omega_2}}{\sum\limits_{i=1}^{8} \frac{1}{\omega_i}} +$$
$$+ \frac{\frac{f_2(x, V_2, V_4)}{\omega_5} + \frac{f_3(x, V_4, V_5)}{\omega_7}}{\sum\limits_{i=1}^{8} \frac{1}{\omega_i}} + \omega \sum_{\substack{i+j=0 \\ i, j \geqslant 0}}^{n} C_{ij} \frac{x^i y^j}{(1 + \omega)^{\frac{2+i+j+1}{2}}}$$

при любых C_{ij} точно удовлетворяет условиям (12).

Таким образом, предлагаемая методика позволяет создать удобный алгоритм для расчета электрических линз на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Волков, В. Ф. Кравченко, Г. П. Манько, В. Л. Рвачев. «Дифференциальные уравнения», т. 3, № 9, 1967.

2. В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев, Э. Д. Прохоров, В. К. Ярмолюк. «Радиотехника и электроника», 1969, № 1.

3. В. Л. Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики. Изд-во «Техника», Киев, 1967.

4. В. Смайт. Электростатика и электродинамика, Изд-во иностр. лит., Л., 1962.
5. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз. Л., 1962.
6. Д. Р. Пирс. Теория и расчет электронных пучков. Изд-во «Советское радио», 1956.