ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАТОРОВ С ДИФРАКЦИОННЫМИ РЕШЕТКАМИ ПРИ ПОМОЩИ СОБСТВЕННЫХ РЕЖИМОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

О. А. Третьяков, А. А. Шматько

Харьков

В настоящей работе рассмотрены собственные резонансные режимы закрытой структуры, одной из стенок которой является отражательная дифракционная решетка. Показано, что для бесконечных периодических структур существует новый тип собственного режима, который характеризуется комплексными значениями как постоянной распространения, так и частоты колебаний. Запись поля в резонаторе, содержащем дифракционную решетку, производится в виде разложения по собственному режиму периодических структур. Получены в явном виде резонансные частоты рассмотренной структуры.

Собственное электромагнитное поле для бесконечных периодических структур, которое удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Delta\vec{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

описывается следующим выражением:

$$\vec{\Pi} = \vec{j}\, e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n(z)\, e^{i\pi(\varkappa\alpha+n)\frac{y}{l}}, \tag{2}$$

где $\vec{\Pi} = \vec{j}\,\Pi$ — вектор Герца; ω — частота колебаний; $2l$ — период структуры; $\varkappa = \frac{l}{\pi}\frac{\omega}{c}$ — безразмерная частота колебаний; α — безразмерная постоянная распространения вдоль структуры. Ось OY перпендикулярна образующим дифракционной решетки.

Составляющие электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей находим с помощью вектора Герца $\vec{\Pi}$ по известным электродинамическим формулам

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}; \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi}. \tag{3}$$

Для любой периодической структуры существуют так называемые собственные режимы. Под ними понимается непрерывное решение в области, дополнительной к периодической структуре однородных уравнений Максвелла. Решение обеспечивает выполнение граничных условий на поверхности решетки. Собственный режим характеризуется двумя параметрами $\varkappa$ и α, которые зависят от геометрии решетки.

Как известно, для открытых бесконечных периодических структур различают три класса собственных режимов. Один из них характеризуется комплексной постоянной распространения $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ и вещественной частотой ω (режим «вытекающих волн» — leaky waves [1—4]). Комплексные значения постоянной распространения α свидетельствуют об утечке энергии поля в свободное пространство. В другом случае частота комплексна $\omega = \omega' - i\omega''$, а постоянная распространения α вещественна (так называемые «затухающие резонансы» — damped resonances [3—4]). Так как частота ω комплексна, то это приводит к затуханию колебаний данного режима во времени.

Собственные режимы как вытекающих волн, так и затухающих резонансов не могут существовать без дополнительного притока энергии извне, хотя они и являются решениями однородных уравнений Максвелла.

Кроме рассмотренных собственных режимов, существует еще третий режим «поверхностных волн», который характеризуется вещественными значениями частоты колебаний ω и вещественными значениями постоянной распространения α. Такой собственный режим присущ целому классу периодических структур [5] и отличается от рассмотренных выше собственных режимов тем, что он может поддерживаться в резонансной системе без дополнительного притока энергии извне. Однако этот собственный режим не исчерпывает всех возможных типов колебаний в резонансных системах, содержащих дифракционные решетки.

Поля в резонансной системе, содержащей дифракционную решетку, можно получить в самом общем случае в виде разложения по собственному режиму бесконечных периодических структур, если ввести еще один тип собственного режима. Этот режим будем характеризовать комплексными значениями постоянной распространения $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ и комплексными значениями частоты $\omega = \omega' - i\omega''$ одновременно. Покажем, что собственные функции резонансной системы, содержащей дифракционную решетку, можно построить с помощью такого собственного режима бесконечных периодических структур. Пусть ширина волновода, ограничивающего дифракционную решетку в y-направлении, равна $2L$. Ось Oz направим вдоль оси волновода, а начало координат поместим на плоскости отражательной дифракционной решетки в середине канавки. Решение однородного уравнения Гельмгольца (1) в области $z > 0$, $-L < y < L$ представим в виде разложения решения по собственным функциям волновода

$$\vec{\Pi} = \vec{j} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m(z) \cos\frac{\pi m}{2L}(y + L), \tag{4}$$

где $\omega = \omega' - i\omega''$ — искомая комплексная частота; функция $\Pi_m(z)$ должна определяться из условия подчинения решения (4) уравнению (1), быть всюду непрерывной и обеспечивать выполнение граничного условия $E_{\mathrm{tg}} = 0$ на идеально проводящих участках резонансной системы.

Решение (4) можно представить эквивалентным образом с помощью суперпозиции полей собственного режима бесконечной отражательной решетки, у которого ω и α одновременно комплексны. Поле (2) перепишем в виде

$$\vec{\Pi} = \vec{j} e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n(z) e^{i\frac{\pi}{2L}2N(\varkappa\alpha + n)(y+L)}, \tag{5}$$

где $\frac{2L}{l} = 2N$ (N — целое число).

Так как $\varkappa = \frac{\omega l}{\pi c}$ и α одновременно комплексны, то

$$\varkappa\alpha = \varkappa'\alpha' + \varkappa''\alpha'' + i(\alpha'\varkappa'' - \varkappa'\alpha'').$$

Величина $\varkappa\alpha$ должна быть вещественной, как следует из представления поля в резонансной системе в виде (4), следовательно,

$$\alpha'' = \alpha' \frac{\varkappa''}{\varkappa'}; \quad \varkappa\alpha = \varkappa'\alpha'\left(1 + \frac{\varkappa''^2}{\varkappa'^2}\right). \tag{6}$$

Представим $\varkappa\alpha$ в виде $\varkappa\alpha = n_0 + \alpha_m$, где n_0 ближайшее целое число к $\varkappa\alpha$, а $|\alpha_m| < \frac{1}{2}$. Из эквивалентности записей полей в виде (4) и (5) находим, что целое число m должно удовлетворять соотношению

$$2N\left[\chi'\alpha'\left(1 + \frac{\chi''^2}{\chi'^2}\right) - n_0\right] = m. \tag{7}$$

Тогда из соотношения (7) легко получить вещественные и мнимые значения параметра α

$$\alpha' = \left(n_0 + \frac{m}{2N}\right)\frac{\chi'}{\chi'^2 + \chi''^2}; \quad \alpha'' = \left(n_0 + \frac{m}{2N}\right)\frac{\chi''}{\varkappa'^2 + \varkappa''^2}, \tag{8}$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N-1), -N$.

Выражение для поля в резонансной структуре, содержащей дифракционную решетку, можно записать в виде разложения по собственному режиму бесконечных периодических структур. Для этого параметры χ и α должны определяться соотношениями (6)—(8).

Собственное электромагнитное поле такого режима имеет вид

$$\vec{\Pi} = \vec{j} e^{-i\omega t} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{n,m}(z) e^{i\pi\left(n_0 + n + \frac{m}{2N}\right)\frac{y+L}{l}}. \tag{9}$$

Записи полей в виде (4) и (9) эквивалентны при условии

$$\Pi_{n,m}(z) = \Pi_{-n,-2n_0,-m}(z); \tag{10}$$
$$\pi_{n,-N}(z) = \pi_{1-n-2n_0,-N}(z).$$

Таким образом, эквивалентность двух представлений поля свидетельствует о существовании четвертого типа собственного режима периодических структур. Для него величины ω и α одновременно являются комплексными, причем вещественная и мнимая части постоянной распространения связаны с комплексной частотой колебаний соотношениями

$$\alpha' = \frac{\pi c}{l}\left(n_0 + \frac{m}{2N}\right)\frac{\omega'}{|\omega|^2}; \quad \alpha'' = \frac{\pi c}{l}\left(n_0 + \frac{m}{2N}\right)\frac{\omega''}{|\omega|^2}. \tag{11}$$

В отличие от режимов затухающих резонансов и вытекающих волн данный собственный режим будет существовать внутри плоско-параллельного волновода, образованного плоскостями $y = \pm L$ и содержащего N элементов периодической структуры. Назовем собственный режим такого типа «волноводным затухающим резонансом».

Таким образом, запись поля (4) в виде (9) представляет собой разложение его по собственным режимам периодической структуры типа волноводных затухающих резонансов. Из эквивалентности (4) и (9) следует, что такое разложение будет полным.

Введенный собственный режим позволяет использовать весь математический аппарат бесконечных периодических структур для описания полей резонаторов, содержащих дифракционную решетку. Для иллюстрации рассмотрим частный случай резонатора, ограниченного плоскостями $y = \pm L$, импедансной стенкой, расположенной в плоскости $z = D$, и отражательной дифракционной решетки, лежащей в плоскости $z = 0$.

Поле над поверхностью решетки, удовлетворяющее уравнению (1), запишем в виде (9), где

$$\Pi_{n, m}(z) = -\frac{l^2}{\pi^2 \chi \zeta_{n, m}} \left[A_n \chi_m e^{i \frac{\pi}{l} \zeta_{n, m} z} + B_{n, m} e^{-i \frac{\pi}{l} \zeta_{n, m}(z-D)} \right] \quad (12)$$

и

$$\zeta_{n, m} = \sqrt{\chi^2 - \alpha_{n, m}^2}; \; \alpha_{n, m} = n_0 + n + \frac{m}{2N}; \; B_{n, m}; \; A_{n, m}$$

неизвестные константы; множитель $\frac{-l^2}{\pi^2 \chi \zeta_{n, m}}$ выделен для удобства последующих выкладок.

Поле в щелях дифракционной решетки $(-h < z < 0)$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1) и граничным условиям на стенках щелей, также разложим по собственному режиму волноводных затухающих резонансов

$$\vec{\Pi} = \vec{j} e^{-i\omega t} \sum_{m=-N}^{N-1} e^{2i\pi M\left(n_0 + \frac{m}{2N}\right)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{2l^2}{i\pi^2 \chi \gamma_\mu} C_{\mu, m} \operatorname{sh}\left(\pi \gamma_m \frac{z+h}{l}\right) \times$$
$$\times \cos\frac{\pi\mu}{2d}(y + L + d + 2Ml), \quad (13)$$

где $M = 0, 1, 2, \ldots, N$ (N — номер ячейки); $\gamma_\mu = \sqrt{\frac{\mu^2}{4\theta^2} - \chi^2}$; $\theta = \frac{d}{l}$; $C_{\mu, m}$ — произвольная константа.

Заметим, что выражение для поля (13) автоматически удовлетворяет граничным условиям в канавках решетки.

Тангенциальные составляющие полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ с учетом (3), (9) и (13) таковы:

$$\left.\begin{aligned} H_x^{(1)} &= e^{-i\omega t} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[A_{n,m} e^{i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}z} - \\ &- B_{n,m} e^{-i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}(z-D)}\Big] e^{i\frac{\pi}{l}\alpha_{n,m}(y+L)}; \\ H_x^{(2)} &= e^{-i\omega t} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} 2C_{\mu,m} \operatorname{ch}\left(\pi\gamma_\mu \frac{z+h}{l}\right) \times \\ &\times \cos\frac{\pi\mu}{2d}(y+L+d+2Ml)\, e^{2i\pi M\left(n_0+\frac{m}{2N}\right)}; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} E_y^{(1)} &= e^{-i\omega t} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[-A_{n,m} e^{i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}z} - \\ &- B_{n,m} e^{-i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}(z-D)}\Big] e^{i\frac{\pi}{l}\alpha_{n,m}(y+L)} \cdot \frac{\zeta_{n,m}}{\chi}; \\ E_y^{(2)} &= e^{-i\omega t} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} 2iC_{\mu,m} \frac{\gamma_\mu}{\varkappa} \operatorname{sh}\left(\pi\gamma_\mu \frac{z+h}{l}\right) \times \\ &\times \cos\frac{\pi\mu}{2d}(y+L+d+2Ml)\, e^{2i\pi M\left(n_0+\frac{m}{2N}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В выражениях для полей индекс 1 относится к области $0<z<<D$, $-L<y<L$, а индекс 2 к области $-h<z<0$; $|y++L|<d$.

Используя граничное условие Леонтовича $E_y = ZH_x$ на поверхности экрана ($z=D$), определим связь между коэффициентами $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$

$$A_{n,m} = -B_{n,m} e^{-i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}D} \frac{\zeta_{n,m} - Z\varkappa}{\zeta_{n,m} + Z\varkappa}, \tag{16}$$

где Z — импеданс отражательного экрана.

Используя непрерывность электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей на периоде структуры в плоскости решетки $z=0$, получим систему функциональных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{\mu,m}$

$$\sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_{n,m} + B_{n,m} e^{i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}D}\right] \frac{\zeta_{n,m}}{\varkappa} e^{i\frac{\pi}{l}\alpha_{n,m}(y+L)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & d \leqslant |y+L| \leqslant l \\ -\sum\limits_{m=-N}^{N-1} \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} 2iC_{\mu,m} \frac{\gamma_\mu}{\varkappa} \operatorname{sh}\left(\pi\gamma_\mu \frac{h}{l}\right) \cos\frac{\pi\mu}{2d}(y+L+d); & \\ & |y+L| \leqslant d \end{cases} \quad (17)$$

$$\sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_{n,m} - B_{n,m} e^{i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}D}\right] e^{i\frac{\pi}{l}\alpha_{n,m}(y+L)} =$$

$$= \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} 2C_{\mu,m} \operatorname{ch}\left(\pi\gamma_\mu \frac{h}{l}\right) \cos\frac{\pi\mu}{2d}(y+L+d); \quad |y+L| \leqslant d.$$

Применяя к системе функциональных уравнений метод переразложения системы функций, полной на одном интервале, по системе функций, полной на другом интервале, получим окончательное решение в виде бесконечной системы однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $X_{n,m}$

$$X_{n,m}(1+\psi_{n,m})\zeta_{n,m} = -i \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{s,m}(1-\psi_{s,m}) \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_\mu \operatorname{tg}\left(\pi\gamma_\mu \frac{h}{l}\right) L_\mu^{n*} L_\mu^s,$$

где

$$X_{n,m} = A_{n,m}; \quad \psi_{n,m} = -\frac{\zeta_{n,m} + Z\varkappa}{\zeta_{n,m} - Z\varkappa} e^{2i\frac{\pi}{l}\zeta_{n,m}D}; \quad (18)$$

$$L_\mu^s = \frac{2-\delta_0^\mu}{2l} \int_{-d}^{d} e^{i\frac{\pi}{l}\alpha_{s,m}(y+L)} \cos\frac{\pi\mu}{2d}(y+L+d)\, dy; \quad L_\mu^{s*} = \frac{2l}{2-\delta_0^\mu} \frac{1}{2d} \left(L_\mu^s\right).$$

Как показано в работе [6], невырожденная система алгебраических уравнений преобразуется к вырожденной при условии, что в канавках решетки может распространяться единственная (нулевая) гармоника без затухания и $\theta^2 \ll 1$ (т. е. ширина щели должна быть малой по сравнению с периодом системы)

$$X_{n,m}(1+\psi_{n,m})\zeta_{n,m} = i\varkappa\theta \operatorname{tg} \pi\varkappa\delta \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{s,m}(1-\psi_{s,m}) s_{0n} s_{0s},$$

где

$$s_{0n} = \frac{\sin \pi\theta\alpha_{n,m}}{\pi\theta\alpha_{n,m}}; \quad s_{0s} = \frac{\sin \pi\theta\alpha_{s,m}}{\pi\theta\alpha_{s,m}}; \quad \delta = \frac{h}{l}. \quad (19)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (19) существует, когда ее детерминант равен нулю. Дисперсионное уравнение, получающееся из этого условия, имеет следующий вид:

$$1 - i\varkappa\theta \operatorname{tg} \pi\varkappa\delta \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1-\psi_{s,m}}{1+\psi_{s,m}} \frac{s_{0s}^2}{\zeta_{s,m}} = 0. \tag{20}$$

Для некоторых резонансных случаев решение трансцендентного уравнения удается получить в аналитической форме [7], что представляет особый интерес.

Напомним, что $\chi\alpha = n_0 + \alpha_m$. В области значений $|\varkappa| < |\alpha_m|$ величина α_m приобретает смысл замедления волны с индексом n по сравнению со скоростью света c. Минимальным замедление оказывается для волны с индексом $n = -n_0$ и равно $\frac{\operatorname{Re} \varkappa}{\alpha_m}$. Физически для условий $|\chi| < |\alpha_m|$ является необходимым, чтобы все гармоники поля затухали по мере удаления от решетки и распространялись вдоль нее со скоростью, меньшей скорости света c.

В области значений $|\chi| > |\alpha_m|$ существует такой случай, когда одна или несколько пространственных гармоник могут распространяться со скоростью света c почти без затухания (затухание вызвано тем, что экран обладает некоторым импедансом Z). Этот случай называется режимом дифракционного излучения. В этом режиме величина $\frac{\alpha_m}{\operatorname{Re} \varkappa}$ является направляющей косинуса y-составляющей волнового вектора для распространяющихся гармоник.

Для получения приближенных значений корней χ в аналитической форме в режиме поверхностных волн $|\chi| < |\alpha_m|$ будем предполагать, что $\left|\frac{\pi D}{l} \sqrt{(s + n_0 - |\alpha_m|)^2 - \chi^2}\right| > 1$ для всех волн с индексом s, за исключением, быть может, $s = -n_0$. В этом случае значение суммы, входящей в уравнение (20), можно вычислить приближенно, тогда дисперсионное уравнение (20) упрощается

$$\frac{Z\varkappa\left(1 - e^{-2\frac{\pi D}{l}\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}}\right) - i\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}\left(1 + e^{-2\frac{\pi D}{l}\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}}\right)}{Z\varkappa\left(1 + e^{-2\frac{\pi D}{l}\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}}\right) - i\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}\left(1 - e^{-2\frac{\pi D}{l}\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}} - 2 \ln \sin \frac{\pi\theta}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \pi\varkappa\delta}{\varkappa\theta}. \tag{21}$$

Это уравнение описывает режим поверхностных волн и в некоторых случаях позволяет определить величину $\varkappa$ как функцию параметров структуры.

Пусть $\left|\frac{\pi D}{l}\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}\right| > 1$, тогда уравнение (21) еще более упростится

$$\operatorname{ctg}\pi\varkappa\delta = \frac{\chi\theta}{\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}} - 2\varkappa\theta \ln \sin\frac{\pi\theta}{2}. \qquad (22)$$

Уравнение (22) описывает режим медленных волн для случая, когда величина $\varkappa$ не находится вблизи точки скольжения (т. е. значения $\varkappa$, при которых медленная волна переходит в быструю), а влиянием экрана можно пренебречь (т. е. он находится на значительном расстоянии от поверхности решетки). Тогда в первом приближении теории возмущений (правая часть уравнения (22) гораздо меньше единицы) значения корней определяются формулой

$$\varkappa = \frac{2N+1}{2\delta} - \left[\frac{\theta(2N+1)}{\pi\delta\sqrt{4\delta^2\alpha_m^2 - (2N+1)^2}} - \frac{2\theta}{\pi\delta}\frac{2N+1}{2\delta}\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}\right]. \qquad (23)$$

Как видно из формулы (23), резонансная частота $\varkappa$ различна для каждого типа колебаний m.

Рассмотрим случай, когда $\varkappa$ близко к точке скольжения (этот случай определяется условием $\left|\sqrt{\alpha_m^2 - \varkappa^2}\right| < \frac{l}{\pi D} < \left|\sqrt{(1 - |\alpha_m|)^2 - \varkappa^2}\right|$). Будем считать, что экран расположен на таком расстоянии, когда его влиянием нельзя пренебречь. Заметим, что

$$\frac{\operatorname{cth}\frac{\pi D}{l}x}{x} = \frac{1}{\frac{\pi D}{l}x^2} + \frac{\pi D}{3l} + O(x^2), \quad \text{при} \quad \frac{\pi D}{l}x < \pi.$$

Тогда дисперсионное уравнение (21), описывающее режим поверхностных волн вблизи точки скольжения, принимает вид

$$\frac{\operatorname{ctg}\pi\varkappa\delta}{\varkappa\theta} = \frac{Z\varkappa + i\frac{\pi}{l}D + i\frac{\pi D}{l}\left(\alpha_m^2 - \varkappa_m^2\right)}{Z\varkappa\left[\frac{l}{\pi D} + \frac{\pi D}{3l}\left(\alpha_m^2 - \varkappa^2\right) + i\left(\alpha_m^2 - \varkappa^2\right)\right]} - 2\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}. \qquad (24)$$

Решение этого уравнения описывается формулой

$$\varkappa = \left\{\alpha_m^2 - \frac{\theta\alpha_m \operatorname{tg}\pi\alpha_m\delta + iZ\alpha_m\left[1 - \theta\alpha_m\operatorname{tg}\pi\alpha_m\delta\left(p - \right.\right.}{p\left[1 - \theta\alpha_m\operatorname{tg}\pi\alpha_m\delta\left(\frac{p}{3} - 2\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}\right)\right] -} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\left.\left. - 2\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}\right)\right]}{- iZ\alpha_m\frac{p^2}{3}\left(1 + 2\theta\alpha_m\operatorname{tg}\pi\alpha_m\delta\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (25)$$

$$p = \frac{\pi D}{l}.$$

В случае дифракционного излучення (режим быстрых волн) наиболее важным является случай с одной быстрой дифракционной гармоникой. Полагая, что $|\alpha_m| < |\varkappa| < 1 - |\alpha_m|$, вместо (21) получим

$$\frac{Z\varkappa\left(1-e^{2ip\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}}\right)-\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}\left(1+e^{2ip\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}}\right)}{Z\varkappa\left(1+e^{2ip\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}}\right)-\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}\left(1-e^{2ip\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}}\right)}\times$$

$$\times\frac{i}{\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}}-2\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\pi\varkappa\delta}{\varkappa\theta}. \tag{26}$$

Пусть $\left|p\sqrt{\varkappa^2-\alpha_m^2}\right|$ не близко к πm, а корень не лежит в окрестности точки скольжения быстрой волны. В этом случае приближенные значения корней могут быть найдены аналитически

$$\varkappa=\frac{2N+1}{2\delta}\left\{\left[1+\frac{2\theta\operatorname{ctg}\frac{p}{2\delta}\sqrt{(2NH)^2-4\delta^2\alpha_m^2}}{\pi\sqrt{(2N+1)^2-4\delta^2\alpha_m^2}}+\frac{2\theta}{\pi\delta}\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}-\right.\right.$$

$$\left.-i\frac{2\theta Z}{(2N+1)\pi}-i4\theta Z\frac{2N+1}{2\delta}\frac{\operatorname{ctg}\frac{p}{2\delta}\sqrt{(2N+1)^2-4\delta^2\alpha_m^2}\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}}{\pi\sqrt{(2N+1)^2-4\delta^2\alpha_m^2}}\right]\times$$

$$\left.\times\left[1-iZ\frac{(2N+1)\operatorname{ctg}\frac{p}{2\delta}\sqrt{(2N+1)^2-4\delta^2\alpha_m^2}}{\sqrt{(2N+1)^2-4\delta^2\alpha_m^2}}\right]^{-1}\right\}. \tag{27}$$

Резонансное значение $\varkappa$ связано с резонансом в канавках дифракционной решетки. Действительно, величина, заключенная в фигурные скобки, порядка единицы, а корни (27) близки к значениям $\varkappa\cong\frac{1}{\delta}\left[N+\frac{1}{2}\right]$, что равносильно $h\cong(2N+1)\frac{\lambda}{4}$. Следовательно, при резонансе такого рода высота щели должна быть близка к нечетному числу четвертей полуволн.

Резонанс может достигаться и вблизи точки скольжения, если величина $p\frac{\operatorname{ctg}\pi\alpha_m\delta}{\alpha_m\theta}+2p\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}$ оказывается большой и отрицательной. В этом случае корни уравнения (26) таковы:

$$\varkappa=\left\{\alpha_m^2-\left(p\frac{\operatorname{ctg}\pi\alpha_m\delta}{\alpha_m\theta}+2p\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}\right)^{-1}\left[1+iZ\alpha_m\left(p-\frac{\operatorname{ctg}\pi\alpha_m\delta}{\alpha_m\theta}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-2\ln\sin\frac{\pi\theta}{2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Третий резонансный случай связан с резонансом поля в пространстве между решеткой и экраном, т. е. те $\varkappa$, при которых величина $\left| p\sqrt{\varkappa^2 - \alpha_m^2} \right|$ близка к πM.

В этом случае значения корней уравнения (26) близки к следующим:

$$\varkappa = \frac{\sqrt{(\pi M)^2 + \alpha_m^2 p^2}}{p} - \left[\theta\left(2\theta\pi M \ln \sin\frac{\pi\theta}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + p \operatorname{ctg}\frac{\pi\delta}{p}\sqrt{(\pi M)^2 + \alpha_m^2 p^2}\right)^{-1} - iZ\right], \tag{29}$$

где M — целое число, определяемое из условия

$$p\sqrt{\varkappa^2 - \alpha_m^2} \cong \pi M.$$

Таким образом, соотношения (27) — (29) дают приближенные значения, отвечающие нескольким качественно различным типам собственных режимов дифракционного излучения.

Один из них связан с резонансом поля в щелях, другой — со скольжением дифракционного луча, третий — с резонансом поля в пространстве решетка—экран.

Помимо очевидного удобства для качественного анализа, эти формулы в пределах областей применимости позволяют рассчитывать резонансные значения частоты с достаточно высокой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. O. Goldstone, A. A. Oliner. Leaky-wave antennas I: Rectangular antennas. IRE Trans. on A. P., vol. AP—7, № 4, 307—319, October, 1959.

2. L. O. Goldstone, A. A. Oliner. Leaky-wave antennas II: Circularwaveguids, IRE Trans. on A. P., vol. Ap—9, № 3, 280—290, May, 1961.

3. В. Г. Сологуб, В. П. Шестопалов. Резонансные явления при дифракции плоской H-поляризованной волны на решетку из металлических брусьев. ЖТФ, т. 38, в. 9, 1968.

4. N. Marcuvitz. On field representations in terms of leaky modes or eigenmodes. IRE Trans. on A. P., vol. Ap—4, № 3, 192—194, July, 1956.

5. Л. Н. Дерюгин. Автореф. докт. дисс., Москва, 1954.

6. В. Г. Сологуб. Наклонное падение H-поляризованной плоской волны на периодическую решетку, составленную из брусьев прямоугольного сечения. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

7. Л. Н. Литвиненко, А. М. Радин, В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. Возбуждение электронным пучком плоского резонатора, содержащего дифракционную решетку. «Изв. вузов, Радиофизика», № 5, 1969.