ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА РЕШЕТКЕ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ

С. А. Масалов, Ю. Т. Репа

Харьков

В работе [1] рассмотрена задача о дифракции плоской E-поляризованной электромагнитной волны, нормально падающей на диэлектрическую решетку. Под диэлектрической решеткой при этом подразумевалась периодическая структура, составленная из изотропных диэлектрических брусьев прямоугольного поперечного сечения (рис. 1). Период вдоль оси oy равен 2π, толщина решетки $2h$. Параметр $0 < \theta < 1$ определяет ширину брусьев. В направлении оси ox решетка бесконечна. Диэлектрическая проницаемость взята в виде

$$\varepsilon(y, z) = \begin{cases} \varepsilon_1, \ |y| \leqslant \pi\theta \pm 2\pi n, \ |z| < h; \\ \varepsilon_2, \ \pi\theta \pm 2\pi n < |y| < 2\pi(1-\theta) \pm 2\pi n, \ |z| < h; \\ 1, \ |z| \geqslant h. \end{cases} \tag{1}$$

$$(n = 0, 1, 2 \ldots)$$

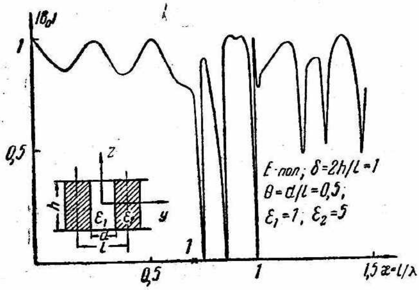

Рис. 1.

Метод работы [1] позволяет решить задачи дифракции при наклонном падении на решетку плоских как E-, так и H-поляризованных волн. В случае нормального падения все результаты упрощаются, но тем не менее позволяют достаточно полно изучить характерные особенности рассматриваемой периодической структуры. Поэтому в данной работе, ограничившись случаем нормального падения, рассмотрено решение задачи дифракции H-волн и проведено аналитическое и численное исследование решения для E- и H-поляризаций.

Пусть падающая волна имеет вид

$$H_{x\,(\text{пад})} = \exp(-ikz), \quad H_{y\,(\text{пад})} = H_{z\,(\text{пад})} = 0, \quad k = 2\pi / \lambda.$$

Зависимость от времени взята в виде $\exp(-i\omega t)$. Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

Полное решение задачи определяется единственной отличной от нуля составляющей магнитного поля $H_x(y, z)$ с помощью уравнений Максвелла.

Искомое решение задачи во всех частичных областях должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta H_x + k^2 \varepsilon(y, z) H_x = 0 \tag{2}$$

и быть таким, чтобы на границе раздела любых двух частичных областей были непрерывны тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей

$$E^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tang}} = E^{\mathrm{II}}_{\mathrm{tang}};\ H^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tang}} = H^{\mathrm{II}}_{\mathrm{tang}}. \quad (3)$$

Энергия рассеянного поля должна быть конечной в любой ограниченной области пространства D, т. е.

$$\int_D (|H_x|^2 + |\nabla H_x|^2)\, d\tau < \infty. \quad (4)$$

Решение должно удовлетворять условию излучения на бесконечности, а также условию периодичности в виде

$$\{H_x(y, z),\ E_y(y, z)\} = \{H_x(y + 2\pi n, z),\ E_y(y + 2\pi n, z)\}. \quad (5)$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \ldots)$$

Из (2), (5) и условия на бесконечности следует, что решение задачи над структурой и под ней можно искать в виде

$$H_x^+(y, z) = -\exp(-ikh) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\left[i(z-h)\sqrt{k^2 - n^2}\right] \cos ny,$$

$$z > h; \quad (6)$$

$$H_x^-(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp\left[i(z+h)\sqrt{k^2 - n^2}\right] \cos ny,\ z < -h,$$

где a_n и b_n — неизвестные амплитудные коэффициенты, а знак $\sqrt{k^2 - n^2}$ выбран так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{k^2 - n^2} > 0$. При $\operatorname{Im}\sqrt{k^2 - n^2} = 0$ $\operatorname{Re}\sqrt{k^2 - n^2} > 0$.

При отыскании представления поля внутри структуры $|z| < h$, $|y| \leqslant \pi$, решая уравнение (2) с граничными условиями (3) и (5) с помощью метода разделения переменных, приходим к уравнению

$$t''(z) - \mu^2 t(z) = 0,\ |z| < h$$

и задаче Штурма — Лиувилля

$$F''(y) + (k^2 \varepsilon_{1,2} + \mu^2) F_y = 0; \quad (7)$$

$$F(\pi) = F(-\pi),\ F'(\pi) = F'(-\pi); \quad (8)$$

$$F(\pm\pi\theta + 0) = F(\pm\pi\theta - 0); \quad (9)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2} F'(\pi\theta + 0) = \frac{1}{\varepsilon_1} F'(\pi\theta - 0);\ \frac{1}{\varepsilon_1} F'(-\pi\theta + 0) = \frac{1}{\varepsilon_2} F'(-\pi\theta - 0).$$

Решая задачу (7) — (9), получим собственные значения μ_m^2 и отвечающие им собственные функции $F_m(y)$. После этого искомое поле внутри диэлектрической решетки может быть представлено в виде разложения в ряд Фурье по полной системе собственных функций $F_m(y)$ задачи (7) — (9)

$$H_x^0(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m \exp(\mu_m z) + \beta_m \exp(-\mu_m z)] F_m(y). \quad (10)$$

Представления (6), (10) удовлетворяют уравнению (2), условию периодичности, условию на бесконечности и краевому условию на границе $y = \pm \pi\theta$, $|z| < h$.

Коэффициенты a_n, b_n, α_m, β_m должны обеспечивать непрерывность полного поля на линиях $z = \pm h$, а энергия рассеянного поля — удовлетворять условию (4). Последнее определит класс последовательностей, в котором мы будем искать решение, а условие непрерывности на границе $z = \pm h$ приведет к уравнениям для отыскания неопределенных коэффициентов.

Прежде чем заняться сведением задачи к системам уравнений для нахождения амплитудных коэффициентов полей, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с системой собственных функций задачи (7) — (9) и отвечающим ей спектром собственных значений.

Собственные значения μ_m^2 находим из уравнения

$$\varepsilon_2 \sqrt{\mu^2 + k^2\varepsilon_1} \operatorname{tg} \pi\theta \sqrt{\mu^2 + k^2\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \sqrt{\mu^2 + k^2\varepsilon_2} \times$$
$$\times \operatorname{tg} \pi (1-\theta) \sqrt{\mu^2 + k^2\varepsilon_2} = 0, \quad (11)$$

а собственные функции при этом имеют вид

$$F_m(y) = \begin{cases} \cos y \sqrt{\mu_m^2 + k^2\varepsilon_1}, & |y| \leqslant \pi\theta, \\ \dfrac{\cos \pi\theta \sqrt{\mu_m^2 + k^2\varepsilon_1}}{\cos \pi (1-\theta) \nu_m} \cdot \cos(|y| - \pi)\nu_m, & \pi\theta \leqslant |y| \leqslant \pi, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\nu_m^2 = \mu_m^2 + k^2\varepsilon_2.$$

Введя в рассмотрение функционал

$$R[w, F] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon(y)} \cdot wF'' dy,$$

можно с его помощью получить ряд свойств собственных функций и собственных значений [1]:

а) собственные функции F_1 и F_2, отвечающие различным собственным значениям μ_1^2 и μ_2^2, ортогональны на интервале $[-\pi, \pi]$ с весом $\frac{1}{\varepsilon(y)}$, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon(y)} F_1 F_2 dy = 0;$$

б) все собственные значения краевой задачи (7) — (9) вещественны;

в) величина $\nu_m^2 = \mu_m^2 + k^2\varepsilon_2$ строго положительна, следовательно, несколько первых собственных значений μ_m^2 могут быть и отрицательны;

г) с ростом k собственные значения краевой задачи (7) — (9) не возрастают, т. е. если $\hat{k} \geqslant k$, то $\hat{\mu}_m^2 \leqslant \mu_m^2$.

Таким образом, в результате решения задачи (7) — (9) получена полная система ортогональных в пространстве $L_2\,[-\pi, \pi]$ с весом $\frac{1}{\varepsilon(y)}$ собственных функций и исследованы некоторые свойства спектра отвечающих им собственных значений.

Теперь получим уравнения для определения коэффициентов a_n, b_n, α_m и β_m. С этой целью удовлетворим граничным условиям (3) при $z = \pm h$ на интервале $|y| \leqslant \pi$. В результате этого мы получаем систему функциональных уравнений, которую впредь будем рассматривать как исходную для определения неизвестных коэффициентов

$$\exp(-ikh) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos ny = \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m \exp(\mu_m h) + \\ + \beta_m \exp(-\mu_m h)]\, F_m(y); \tag{13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos ny = \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m \exp(-\mu_m h) + \beta_m \exp(\mu_m h)]\, F_m(y);$$

$$-ik \exp(-ikh) + i \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{k^2 - n^2} \cos ny =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m \exp(\mu_m h) - \beta_m \exp(-\mu_m h)]\, \mu_m \frac{1}{\varepsilon(y)} F_m(y);$$

$$-i \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sqrt{k^2 - n^2} \cos ny =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m \exp(-\mu_m h) - \beta_m \exp(\mu_m h)]\, \mu_m \frac{1}{\varepsilon(y)} F_m(y).$$

Коэффициенты a_n, b_n, α_m, β_m будем искать в классе, который определен условием конечности энергии в любой ограниченной области пространства (4). Из (4) следует, что должен сходиться ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)(1 + n) < \infty. \tag{14}$$

Полнота системы собственных функций $F_m(y)$ и системы функций $\cos ny$ на интервале $[-\pi, \pi]$ позволяет получить из уравнений (13) бесконечные системы линейных алгебраических уравнений первого либо второго рода относительно любых неизвестных амплитудных коэффициентов. Так как нас чаще всего интересует поле в дальней зоне, приведем системы линейных алгебраических уравнений первого рода для нахождения коэффициентов a_n и b_n, определяющих поля вне диэлектрической решетки:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (\mu_m \eta_m^n - i\sqrt{k^2 - n^2}\,\xi_m^n \operatorname{th}\mu_m h) =$$
$$= -\exp(-ikh)(\mu_m \eta_m^0 + ik\xi_m^0 \operatorname{th}\mu_m h); \tag{15}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n (\mu_m \eta_m^n \operatorname{th}\mu_m h - i\sqrt{k^2 - n^2}\,\xi_m^n) =$$
$$= -\exp(-ikh)(\mu_m \eta_m^0 \operatorname{th}\mu_m h + ik\xi_m^0),$$

где

$$m = 0,\ 1,\ 2\ \ldots;\quad \xi_m^n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ny F_m(y)\,dy;$$

$$\eta_m^n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon(y)} \cos ny F_m(y)\,dy;\ A_n = 2(a_n - b_n),\ B_n = 2(a_n + b_n);$$

$$A_0 = a_0 - b_0,\ B_0 = a_0 + b_0.$$

С целью сравнения выпишем полученные в работе [1] бесконечные системы линейных алгебраических уравнений первого рода относительно аналогичных коэффициентов A_n и B_n при E-поляризации падающей волны

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (\mu_m - i\sqrt{k^2 - n^2} \operatorname{th}\mu_m h)\,\xi_m^n =$$
$$= -\exp(-ikh)(ik \operatorname{th}\mu_m h + \mu_m)\,\xi_m^0; \tag{16}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n (\mu_m \operatorname{th}\mu_m h - i\sqrt{k^2 - n^2})\,\xi_m^n =$$
$$= -\exp(-ikh)(\mu_m \operatorname{th}\mu_m h + ik)\,\xi_m^0,\ m = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Здесь используются те же обозначения, что и в (15).

Укажем сразу, что если в системах (15) либо (16) положить $\theta = 0$, то как в первом, так и во втором случае системы существенно упрощаются и из них легко найти формулы для коэффициентов отражения и прохождения при нормальном падении плоской волны на слой диэлектрика с $\varepsilon = \varepsilon_2$ и толщиной $d = 2h$.

Метод получения систем уравнений (15) и (16) совершенно одинаков. Разница между E- и H-поляризацией заключается в том, что в первом случае поле внутри структуры представляется в виде ряда по полной системе гладких функций, в то время как при H-поляризации поле (10) является разложением в ряд Фурье по полной системе кусочно-гладких функций $F_m(y)$ (12). Это обстоятельство приводит к некоторым осложнениям при аналитическом и численном анализе найденных систем уравнений (15) в случае H-поляризации.

Поэтому для простоты ограничимся анализом систем (16). Отметим, что в пользу попытки анализировать именно системы (16) свидетельствует еще и тот факт, что матричные элементы этих систем значительно проще матричных элементов систем второго рода относительно A_n и B_n, полученных в работе [1].

Запишем первую из систем (16) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n p_{mn} = \gamma_m, \tag{17}$$

где

$$p_{mn} = (\mu_m - i\sqrt{k^2 - n^2}\,\mathrm{th}\,\mu_m h)\,\xi_m^n;$$
$$\gamma_m = -\exp(-ikh)(ik\,\mathrm{th}\,\mu_m h + \mu_m)\,\xi_m^0.$$

Ее решения будем искать в пространстве последовательностей $\{A_n\}_0^\infty$, которые удовлетворяют условию (14).

Учитывая асимптотику диагональных элементов p_{nn} системы (17) при $n \to \infty$

$$p_{nn} = cn + 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

выделим в ряде, стоящем в левой части системы (17), слагаемые при $n = m$ и перепишем ее в виде эквивалентной системы второго рода

$$A_m = \sum_{\substack{n,\ m \\ n \neq m}} Q_{mn} A_n + q_m, \quad m = 0,\ 1,\ 2\ \ldots, \tag{18}$$

$$Q_{mn} = -\frac{p_{mn}}{p_{mm}}, \quad q_m = \frac{\gamma_m}{p_{mm}}.$$

В операторном виде система (18) запишется так:

$$\vec{A} = Q\vec{A} + \vec{q}. \tag{19}$$

В пространстве последовательностей со сходящимся рядом (14) матричный оператор Q будет вполне непрерывным, что следует из сходимости ряда

$$\sum_{\substack{n,\ m \\ n \neq m}} |Q_{mn}|^2 \frac{1+m}{1+m} < \infty, \tag{20}$$

которую нетрудно обосновать, пользуясь оценкой для матричных элементов Q_{mn}:

$$|Q_{mn}| \leqslant \frac{c}{m(n-m)^2}, \quad n \neq m.$$

Поскольку правая часть системы (19) $\vec{q}$ также принадлежит (14), можно заключить, что в предположении единственности решения системы (18) его можно получить при любых параметрах решетки с любой степенью точности, применяя метод усечения [2].

Так как система (18) является эквивалентом системы первого рода (17), то все сказанное справедливо и для последней. Аналогичное рассуждение можно провести и для второй из двух бесконечных систем (16).

Приближенное решение, построенное с помощью усечения, будет тем меньше отличаться от точного, чем выше порядок усечения. Грубая оценка скорости сходимости, приведенная в работе [2], при этом дает

$$\max_n |A_n - A_n^{(N)}| \leqslant cN^{-1}, \quad \max_n |B_n - B_n^{(N)}| < cN^{-1},$$

где A_n и B_n — точные значения коэффициентов, а $A_n^{(N)}$ и $B_n^{(N)}$ — их приближенные значения, полученные из усеченных систем порядка N.

В действительности скорость сходимости метода усечения, полученная на ЭВМ, значительно больше. Например, для получения с графической точностью коэффициентов a_0 и b_0 при $0 < k < 1$ достаточно решить на ЭВМ систему уравнений 4—5 порядка.

В случае E-поляризации относительная простота матричных элементов системы (18) позволяет провести некоторые аналитические исследования. Рассмотрим, например, нашу систему в случае, когда область, заполненная одним из диэлектриков, оказывается очень узкой — значительно меньше периода системы, $\theta \ll 1$ (почти вся решетка заполнена диэлектриком с $\varepsilon = \varepsilon_2$).

Заметим, что все матричные элементы Q_{mn} стремятся к нулю при $\theta \to 0$. Используя асимптотику собственных значений задачи, можно показать, что норма матрицы Q в пространстве (14) стремится к нулю при $\theta \to 0$. При доказательстве используются асимптотики собственных значений задачи для случая узких брусьев с ε_1, когда $m\theta \ll 1$

$$\sqrt{k^2\varepsilon_2 + \mu_m^2} = m + \frac{k^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{m}\theta + O\left[\frac{\theta^2}{m^3}\right]; \tag{21}$$

$$\sqrt{k^2\varepsilon_2 + \mu_0^2} = k\sqrt{\theta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} + O(\theta^{5/2}), \quad k^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\theta \ll 1,$$

и больших m

$$\sqrt{k^2\varepsilon_2 + \mu_m^2} = m + \frac{k^2\theta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2m} + O\left[\frac{1}{m^2}\right].$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\substack{n,\ m=1\\ n\neq m}}^{\infty} |Q_{mn}|^2 \frac{m+1}{n+1} = \sum_{m=1}^{[\theta^{-\alpha}]} (m+1)\left[\sum_{n=1}^{m-1} |Q_{mn}|^2 \frac{1}{n+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=m+1}^{[\theta^{-\alpha}]} |Q_{mn}|^2 \frac{1}{n+1} + \sum_{n=[\theta^{-\alpha}]+1}^{\infty} |Q_{mn}|^2 \frac{1}{n+1}\right] + \qquad (22)$$

$$+ \sum_{m=[\theta^{-\alpha}]+1}^{\infty} (m+1)\left[\sum_{n=1}^{[\theta^{-\alpha}]} |Q_{mn}|^2 \frac{1}{n+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=[\theta^{-\alpha}]+1}^{m-1} |Q_{mn}|^2 \frac{1}{n+1} + \sum_{n=m+1}^{\infty} |Q_{mn}|^2 \frac{1}{n+1}\right], \quad 0<\alpha<1.$$

Можно показать, что имеют место следующие оценки для матричных элементов Q_{mn} $(\mathrm{Re}\, \mathrm{th}\, \mu_m h > 0)$:

$$|Q_{mn}| < c_1 \frac{m\,|\sin m\pi\theta| + n\,|\sin n\pi\theta|}{m(m-n)^2(m+n)}, \quad \begin{matrix} n < m \leqslant [\theta^{-\alpha}]; \\ m < n \leqslant [\theta^{-\alpha}]; \end{matrix}$$

$$|Q_{mn}| < c_2 \frac{m\,|\sin m\pi\theta| + n}{m(m-n)^2(m+n)}, \quad m \leqslant [\theta^{-\alpha}] < n;$$

$$|Q_{mn}| < c_3 \frac{m + n\,|\sin n\pi\theta|}{m(m-n)^2(m+n)}, \quad n < [\theta^{-\alpha}] \leqslant m;$$

$$|Q_{mn}| < \frac{c_4}{m^2(m-n)^4}, \quad \begin{matrix} [\theta^{-\alpha}] \leqslant n < m; \\ [\theta^{-\alpha}] \leqslant m < n. \end{matrix}$$

Используя эти оценки, получим

$$\sum_{\substack{m,\ n=1\\ n\neq m}}^{\infty} |Q_{mn}|^2 \frac{1+m}{1+n} < c_5\theta^{\alpha}.$$

Следовательно, $\|Q\|_1^{\infty} \leqslant c\theta^{\alpha/2}$, а систему (18) при $\theta \ll 1$ можно решать методом последовательных приближений. Ограничиваясь первым приближением, выпишем выражения для a_0 и b_0 с точностью до $\theta^{3/2}$

$$a_0 = -\exp(-ikh) \frac{\left[\varepsilon_2 - \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\theta\right)^2\right] [\exp(2h\mu_0) - }{\left[\sqrt{\varepsilon_2}\left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\sqrt{\varepsilon_2}}\theta\right)\right]^2 \exp(2h\mu_0) - }$$

$$\frac{-\exp(-2h\mu_0)]}{-\left[\sqrt{\varepsilon_2} + \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\sqrt{\varepsilon_2}}\theta\right)\right]^2 \exp(-2h\mu_0)}, \qquad (23)$$

$$b_0 = -\exp(-ikh)\frac{4\sqrt{\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_2}\theta\right)}{\left[\sqrt{\varepsilon_2}-\left(1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\sqrt{\varepsilon_2}}\theta\right)\right]^2\exp(2h\mu_0)-\left[\sqrt{\varepsilon_2}+\left(1-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\sqrt{\varepsilon_2}}\theta\right)\right]^2\exp(-2h\mu_0)}.$$

Аналогично рассматривается случай $\theta\to 1$. Первое приближение дает с точностью до $(1-\theta)^{3/2}$ формулы, которые следуют из (23) при заменах ε_1 на ε_2, ε_2 на ε_1 и θ на $1-\theta$.

Заметим, что анализ, проведенный выше, осуществим и в применении к системам уравнений второго рода, однако громоздкость его при этом значительно возрастает.

Обращаясь теперь к случаю H-поляризации, отметим, что в результате представления поля внутри решетки в виде разложения по кусочно-гладким функциям усложняется аналитическое исследование и ухудшается численная скорость сходимости. Для получения с графической точностью коэффициентов a_n и b_n при $0<k<1$ в случае H-поляризации достаточно решать на ЭВМ систему уравнений (9) — (10) порядка.

Предполагая, что при нормальном падении H-поляризованной волны нормы матричных операторов систем уравнений относительно A_n и B_n меньше единицы при $\theta\ll 1$, можно формально построить в этом случае решение с помощью метода последовательных приближений. Первые приближения для a_0 и b_0 с точностью до $\theta^{3/2}$ имеют вид

$$a_0 = -\exp(-ikh)\frac{\left[1-\varepsilon_2\left(1-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}\theta\right)^2\right]\times[\exp(2h\mu_0)-\exp(-2h\mu_0)]}{\left[\sqrt{\varepsilon_2}-\left(1+\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}\theta\right)\right]^2\exp(2h\mu_0)-\left[\sqrt{\varepsilon_2}+\left(1-\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}\theta\right)\right]^2\exp(-2h\mu_0)}; \quad (23^*)$$

$$b_0 = -\exp(-ikh)\frac{4\sqrt{\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}\theta\right)]}{\left[\sqrt{\varepsilon_2}-\left(1+\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}\theta\right)\right]^2\exp(2h\mu_0)-\left[\sqrt{\varepsilon_2}-\left(1-\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}\theta\right)\right]^2\exp(-2h\mu_0)}.$$

Переходя к анализу полученных результатов, в первую очередь рассмотрим приближение, когда один из диэлектрических брусьев узок по сравнению с периодом системы. Если в (23) устремить $\theta\to 0$, получим решение задачи о дифракции на идеальном слое диэлектрика толщиной $2h$ с $\varepsilon=\varepsilon_2$.

Полное прохождение наступает, если коэффициент отражения равен нулю. Из (23) можно получить соответствующие значения k_n с точностью до $\theta^{3/2}$ при $\theta \ll 1$

$$k_n = \frac{n\pi}{2h\sqrt{\varepsilon_2}\left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2}\theta\right)}, \; n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots, \tag{24}$$

и с точностью до $(1-\theta)^{3/2}$ при $(1-\theta) \ll 1$

$$k_n = \frac{n\pi}{2h\sqrt{\varepsilon_1}\left(1 + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(1-\theta)}{2\varepsilon_1}\right)}, \; n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{25}$$

Как показывает численный анализ в длинноволновой области, формулой (24) с графической точностью можно пользоваться при $\theta < 0{,}2$ (рис. 2), формулой (25) — при $\theta > 0{,}8$.

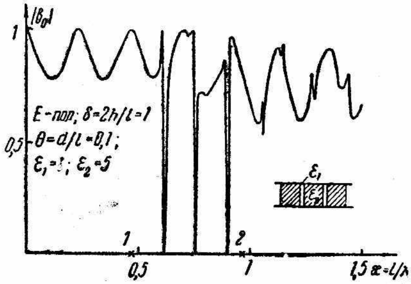

Рис. 2.

Аналогичные выражения можно получить для параметров, характеризующих структуру. Например, при фиксированных k, ε_1, ε_2 и θ резонансное прохождение по высоте происходит при

$$h_{\text{рез}} = \frac{n\pi}{2k\sqrt{\varepsilon_2}\left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2}\theta\right)}, \; n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots,\ \theta \ll 1.$$

Как при E-, так и при H-поляризации для диэлектрической решетки характерно следующее. Несколько первых собственных значений задачи (7) — (9) могут быть отрицательными. Из представления (10) для $|z| < h$ видно, что каждому отрицательному собственному значению отвечают волны, распространяющиеся внутри диэлектрической решетки нормально к ее плоскости.

Диапазон по k назовем одноволновым, если внутри решетки распространяются волны, отвечающие индексу $m = 0$, в представлении поля (10), двухволновым, если $m = 0{,}1$, и многоволновым, если $m = 0,\ 1,\ 2$ и более. На рис. 1—4 нижние границы диапазонов отмечены крестиками на оси k (k_1 — начало двухволнового диапазона, k_2 — многоволнового).

С помощью представления для собственных функций $F_m(y)$ можно исследовать картину поля незатухающих волн внутри решетки.

В одноволновом диапазоне всегда существуют две поверхностные волны (прямая и отраженная), испытывающие полное внутреннее отражение от границ сред с диэлектрической проницаемостью ε_2 и ε_1 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$) и распространяющиеся вдоль оси oz.

При $k > k_1$ внутри решетки появляются новые распространяющиеся волны. Вначале они имеют характер объемных волн. При $k > k^*$ (где $k^* > k_1$ отвечают тому значению частоты, при котором в области с бо́льшим значением диэлектрической проницаемости возникают условия полного внутреннего отражения) эти волны преобразуются в поверхностные.

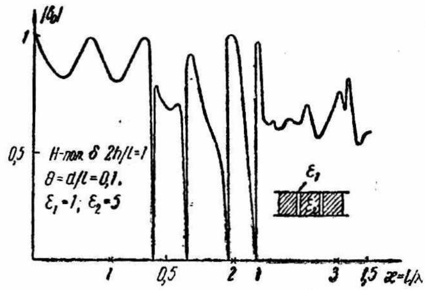

Рис. 3.

Дальнейшее повышение частоты приводит к появлению новых поверхностных волн, распространяющихся нормально к плоскости решетки и т. д. Именно эти волны определяют особенности характеристик рассеянного поля в случае, когда толщина решетки достаточно велика.

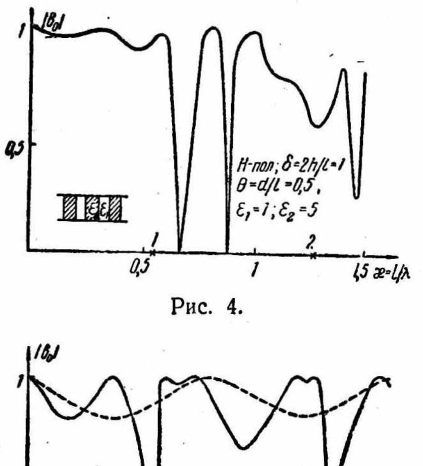

Рис. 4.

В одноволновом диапазоне зависимости модулей коэффициентов $|a_0|$ и $|b_0|$ от параметров k, h, ε, θ носят достаточно гладкий характер. Из графиков (рис. 1 — 5) видно, что, меняя k либо h в этом диапазоне, мы получим синусоидальную зависимость для $|a_0|$ и $|b_0|$. При этом максимумы прохождения на рис. 2 можно получить из формулы (24), так как данный случай отвечает узкой области с ε_1.

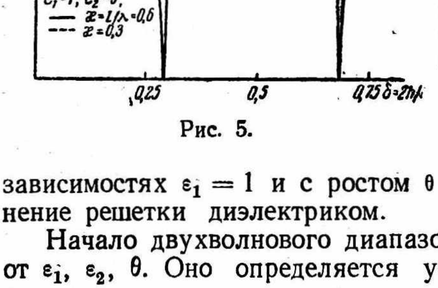

Рис. 5.

Сравнивая в этом диапазоне графики для E- и H-поляризации, видим, что при H-поляризации амплитуда осцилляции меньше и максимумы сдвинуты в сторону укорочения длин волн. С ростом θ амплитуда осцилляции (рис. 1—4) во всех случаях уменьшается. Это естественно, так как на приведенных зависимостях $\varepsilon_1 = 1$ и с ростом θ убывает относительное заполнение решетки диэлектриком.

Начало двухволнового диапазона частот существенно зависит от ε_1, ε_2, θ. Оно определяется условием $\mu_1^2 = 0$. Характер дифракционных зависимостей здесь резко усложняется. Это объясняется тем, что распространяющиеся внутри решетки гармоники интерферируют друг с другом. Наиболее существенным в этом диапазоне является тот факт, что здесь для обеих поляризаций существуют точки полного прохождения и полного отражения при изменении как частоты (рис. 1,4), так и толщины h (рис. 5) либо других параметров задач (θ, ε_2). При этом интерференция волн внутри решетки приводит к тому, что в отдельных случаях изменение по k на величину порядка 10^{-4} может привести к изменению $|b_0|$ от 1 до 0. В этом, как и в следующих диапазонах частот, определяющим при исследовании свойств данной структуры является численный анализ.

В заключение укажем на то, что аналогичные свойства, связанные с одно-, двухволновым характером полей внутри резонансной структуры (в нашем случае диэлектрической решетки) были получены и детально обследованы другими авторами для объемных ленточных структур из идеально проводящих элементов. Во многом свойства последних совпадают со свойствами нашей решетки. Есть и существенные различия. Например, в длинноволновой области структуры из идеально-проводящих элементов практически полностью отражают падающее поле E-поляризованной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Масалов, Ю. Т. Репа, В. П. Шестопалов. Сб. «Радиотехника», вып. 10. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.

2. А. В. Канторович, Г. Б. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.