ДИФРАКЦИЯ *Е*-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНО ТОНКОМ ПРОДОЛЬНО-ЩЕЛЕВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С КОАКСИАЛЬНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СТЕРЖНЕМ

В. Д. Хаджинов

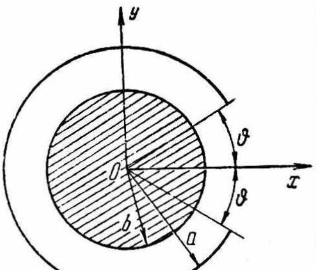
Харьков

Дифракции электромагнитных волн на щелевом волноводе посвящен ряд работ, в которых используют приближенные методы решения, связанные с самой постановкой задачи. В настоящей работе показано, что метод решения дифракционных задач, развитый в работе [4], позволяет использовать дифракцию на продольно-щелевых бесконечно тонких цилиндрических волноводах.

Применимость указанного метода дает решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны, нормально падающей на продольно-щелевой бесконечно тонкий металлический волновод с аксиальным металлическим стержнем.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный идеально проводящий цилиндр радиуса a с продольной щелью, угловая величина которой задается как 2θ, с коаксиальным металлическим цилиндром радиуса b (рисунок). Ось цилиндра совпадает с осью oz. Справа вдоль оси ox на цилиндр падает плоская электромагнитная волна

$$E_z^{\text{пад}} = e^{ikx};\ H_y^{\text{пад}} = e^{ikx};\ E_x^{\text{пад}} = E_y^{\text{пад}} = H_z^{\text{пад}} = H_x^{\text{пад}} = 0 \tag{1}$$



(временный множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен).

Перейдем к цилиндрической системе координат и, используя известное соотношение

$$e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n I_n(kr)\, e^{in\varphi},$$

запишем падающее поле

$$E_z^{\text{пад}} = e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n I_n(kr)\, e^{in\varphi};$$

$$H_\varphi^{\text{пад}} = \cos\varphi e^{ikr\cos\varphi} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n I_n'(kr)\, e^{in\varphi};$$

$$H_r^{\text{пад}} = \sin\varphi e^{ikr\cos\varphi} = -\frac{1}{kr}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nI_n(kr)\, e^{in\varphi}; \tag{2}$$

$$E_r^{\text{пад}} = E_\varphi^{\text{пад}} = H_z^{\text{пад}} = 0.$$

Требуется определить поле, возникающее в результате дифракции волны (2) на данной системе.

Искомые поля должны быть непрерывны во всем пространстве, удовлетворять уравнениям Максвелла, граничным условиям на поверхности цилиндра и стержня, условиям на бесконечности. Кроме того, будем считать, что искомые поля всюду являются суперпозицией падающего и дифракционных полей. В связи с тем, что система вдоль oz однородна, а по φ — периодична, искомое поле удобно представить в виде ряда Фурье — Бесселя.

Разобьем рассматриваемую систему на две области: первая $b < r < a$; вторая $r > a$.

Исходя из уравнений Максвелла, запишем составляющие электромагнитного поля в каждой из областей

$$b < r < a;$$

$$E_{z1}^{\text{д}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n I_n(kr) + C_n Y_n(kr)]\, e^{in\varphi};$$

$$H_{\varphi 1}^{\text{д}} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n I_n'(kr) + C_n Y_n'(kr)\right] e^{in\varphi}; \tag{3}$$

$$H^{д}_{rI} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{kr} [A_n I_n(kr) + C_n Y_n(kr)] e^{in\varphi}.$$

При $r > a$

$$E^{д}_{zII} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}; \quad H^{д}_{\varphi II} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)\prime}(kr) e^{in\varphi}; \qquad (4)$$

$$H^{д}_{rII} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{kr} B_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}.$$

Для отыскания неизвестных коэффициентов Фурье — Бесселя, подчиним поле точным граничным условиям на поверхности $r = b$ и $r = a$.

При $r = b$

$$E_{zII} = 0 \quad \text{(на всем периоде } \varphi\text{)}; \qquad (5)$$

$$H_{rII} = 0 \quad \text{(на всем периоде } \varphi\text{)}; \qquad (6)$$

При $r = a$

$$E_{zI} = E_{zII} \quad \text{(на всем периоде } \varphi\text{)}; \qquad (7)$$

$$E_{zI} = E_{zII} = 0 \quad \text{(при } \theta < |\varphi| \leqslant \pi\text{)}; \qquad (8)$$

$$H_{\varphi I} = H_{\varphi II} \quad \text{(при } \theta > |\varphi|\text{)}; \qquad (9)$$

$$H_{rI} = H_{rII} \quad \text{(на всем периоде } \varphi\text{)}. \qquad (10)$$

Подставляя выражение полей в граничные условия, получим соотношения, связывающие неизвестные коэффициенты:

$$C_n = -\frac{I_n(kb)}{Y_n(kb)} [i^n + A_n]; \qquad (11)$$

$$B_n = A_n \frac{I_n(ka) Y_n(kb) - I_n(kb) Y_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka) Y_n(kb)} - i^n \frac{I_n(kb) Y_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka) Y_n(kb)} \qquad (12)$$

в систему функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\varphi} = 0 \quad \text{(металл)}; \qquad (13)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{H_n^{(1)}(kb)}{H_n^{(1)}(ka)} \frac{e^{in\varphi}}{I_n(ka) Y_n(kb) - I_n(kb) Y_n(ka)} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{e^{in\varphi}}{H_n^{(1)}(ka)}$$

(щель), (14)

где

$$b_n = [A_n + i^n] \frac{I_n(ka) Y_n(kb) - I_n(kb) Y_n(ka)}{Y_n(kb)}. \qquad (15)$$

Введем параметр ε_n таким образом, чтобы при $n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{1}{i\pi\,|n|\,I_n(ka)\,H_n^{(1)}(ka)\left[1 - \dfrac{I_n(kb)H_n^{(1)}(ka)}{I_n(ka)H_n^{(1)}(kb)}\right]} \tag{16}$$

(можно показать, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$).

Продифференцировав (11) по φ и введя $x_n = nb_n$, получим

$$\sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0, \quad \theta < |\varphi| < \pi; \tag{17}$$

$$\sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = Pb_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi}, \quad |\varphi| < \theta, \tag{18}$$

где

$$P = \frac{i}{\pi} \frac{1}{I_0(ka)H_0^{(1)}(ka)\left[1 - \dfrac{I_0(kb)H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka)H_0^{(1)}(kb)}\right]};$$

$$f_n = \left\{x_n \frac{|n|}{n}\varepsilon_n - i^n \frac{i}{\pi}\frac{1}{H_n^{(1)}(ka)}\right\}; \quad f_0 = -\frac{i}{\pi}\frac{1}{H_0^{(1)}(ka)}.$$

К (15), (16) необходимо еще присоединить уравнение, которое получится из (13) при $\varphi = \pi$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} x_n + b_0 = 0. \tag{19}$$

Таким образом, имеем замкнутую систему функциональных уравнений (17), (18) и (19), которая с помощью метода задачи Римана-Гильберта может быть сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_m = \frac{i}{\pi} \frac{b_0 V_m^0}{I_0(ka)H_0^{(1)}(ka)\left[1 - \dfrac{I_0(kb)H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka)H_0^{(1)}(kb)}\right]} +$$

$$+ \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n}\varepsilon_n V_m^n - \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{V_m^n}{H_n^{(1)}(ka)} + 2x_{-1}R_m; \tag{20}$$

$$0 = \frac{i}{\pi} \frac{b_0 V_0^0}{I_0(ka)H_0^{(1)}(ka)\left[1 - \dfrac{I_0(kb)H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka)H_0^{(1)}(kb)}\right]} +$$

$$+ \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n}\varepsilon_n V_0^n - \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{V_0^n}{H_n^{(1)}(ka)} + 2x_{-1}R_0;$$

$$-b_0 = \frac{i}{\pi} \frac{b_0 V_0^0}{I_0(ka) H_0^{(1)}(ka)\left[1 - \frac{I_0(kb) H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka) H_0^{(1)}(kb)}\right]} +$$

$$+ \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{[\sigma]}^n - \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{V_{[\sigma]}^n}{H_n^{(1)}(ka)} + 2x_{-1} R_{[\sigma]}.$$

Коэффициенты V_m^n; R_m; $V_{[\sigma]}^n$; $R_{[\sigma]}$ здесь те же, что и в работе [4].

Из (20) можно получить различные предельные случаи.

1. Если $\theta = 0$,

$$V_m^n(\cos\theta) = 0;\ V_{[\sigma]}^n(\cos\theta) = 0;\ 2R_m(\cos\theta) = 1;\ R_{[\sigma]}(\cos\theta) = 0,$$

система (20) примет вид

$$x_m = x_{-1};\ 0 = x_{-1};\ -b_0 = x_{-1}.$$

Отсюда $b_n = 0$, $b_0 = 0$, следовательно, $A_n = -(i)^n$ (при любых n).

Общее поле внутри волновода при этом будет равно нулю

$$E_{z\mathrm{I}} = E_z^{\text{пад}} + E_z^{\text{д}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n I_n(kr) e^{in\varphi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n I_n(kr) e^{in\varphi} = 0,$$

а во внешнем пространстве совпадет с полем, получающимся в результате решения задачи рассеяния электромагнитной волны соответствующей поляризации на сплошном цилиндре.

2. Если $\theta = \pi$ (сплошной цилиндр радиуса b),

$$V_m^m = \frac{|m|}{m};\ R_m = \frac{1}{2}(-1)^m;\ V_0^0 = 1;\ V_0^{-1} = 1;\ V_m^n = 0\,(m \neq 0);$$

$$V_{-1}^{-1} = 0;\ V_m^{-1} = (-1)^m;\ \lim_{\theta \to \pi} R_{[\sigma]} = \infty;\ \lim_{\theta \to \pi} V_{[\sigma]}^n = \infty;$$

$$\lim_{\theta \to \pi} \frac{V_{[\sigma]}^n}{R_{[\sigma]}} = 0;\ \lim_{\theta \to \pi} \frac{V_{[\sigma]}^{-1}}{R_{[\sigma]}} = 2.$$

Разделим последнее равенство (20) на $R_{[\sigma]}$. Учитывая эти соотношения, имеем

$$x_m(1 - \varepsilon_n) = \frac{(i)^{m+1}}{\pi H_m^{(1)}(ka)} \frac{|m|}{m} + x_{-1}[1 - \varepsilon_{-1}](-1)^m - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^m}{H_{-1}^{(1)}(ka)}; \quad (21)$$

$$0 = \frac{i}{\pi} \frac{b_0}{I_0(ka) H_0^{(1)}(ka)\left[1 - \frac{I_0(kb) H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka) H_0^{(1)}(kb)}\right]} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{1}{H_0^{(1)}(ka)} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{H_{-1}^{(1)}(ka)} + x_{-1}[1 - \varepsilon_{-1}]; \quad (22)$$

$$0 = x_{-1}[1-\varepsilon_{-1}] - \frac{1}{\pi}\frac{1}{H_{-1}^{(1)}(ka)},$$

откуда

$$x_m = m(i)^m I_m(ka)\left[1 - \frac{I_m(kb)\,H_m^{(1)}(ka)}{I_m(ka)\,H_m^{(1)}(kb)}\right];$$

$$A_n = (i)^{n+1}\frac{Y_n(kb)}{H_n^{(1)}(kb)} - (i)^n \text{ (при любых } n\text{).}$$

Если теперь подставить значения A_n в выражение (3), получим

$$E_{z1}^{\text{д}} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n I_n(kb)\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kb)}.$$

Этот результат совпадает с выражением для рассеянной электромагнитной волны соответствующей поляризации на сплошном цилиндре радиуса b.

Рассмотрим случай, когда $\lambda \to \infty$. При этом $kb < ka \ll 1$. Систему (20) можно решить методом последовательных приближений, учитывая, что $\varepsilon_n \sim 0\left(\frac{ka}{2}\right)^2$ при любых n. В первом приближении решение представляем в виде

$$X_m = \frac{1}{\pi}\frac{b_0 V_{m-1}^{-1}}{I_0(ka)\,H_0^{(1)}(ka)\left[1 - \frac{I_0(kb)\,H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka)\,H_0^{(1)}(kb)}\right]} - \frac{i}{\pi}\sum i^n \frac{V_{m-1}^{n-1}}{H_n^{(1)}(ka)}; \quad (23)$$

$$b_0 = \frac{\frac{i}{\pi}\sum\limits_n i^n \frac{W_n}{H_n^{(1)}(ka)}}{1 + \frac{i}{\pi}\frac{W_0}{I_0(ka)\,H_0^{(1)}(ka)\left[1 - \frac{I_0(kb)\,H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka)\,H_0^{(1)}(kb)}\right]}},$$

где

$$W_0 = \ln\frac{1+u}{2}, \quad W_n = \frac{1}{2n}[P_n(u) - P_{n-1}(u)] \quad (n \neq 0).$$

Из выражения для полей (3) и амплитуд (15) очевидно, что основной вклад в возбуждаемое поле при $ka \to 0$ вносит нулевая гармоника. Кроме того, величина $\frac{W_0}{H_0^{(1)}(ka)} \gg \frac{W_n}{H_n^{(1)}(ka)}$ при $ka \to 0$ и любых размерах щели, поэтому (23) можно упростить:

$$b_0 = \frac{\frac{i}{\pi} \frac{W_0}{H_0^{(1)}(ka)}}{1 + \frac{i}{\pi} \frac{W_0}{I_0(ka) H_0^{(1)}(ka) \left[1 - \frac{I_0(kb) H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka) H_0^{(1)}(kb)}\right]}}.$$

Тогда поле внутри цилиндра запишем

$$E_{z1} = E_{z1}^{д} + E_z^{пад} = b_0 \frac{I_0(kr) Y_0(kb) - I_0(kb) Y_0(kr)}{I_0(ka) Y_0(kb) - I_0(kb) Y_0(ka)} =$$

$$= \frac{i}{\pi} \frac{W_0}{H_0^{(1)}(ka)} \frac{\frac{I_0(kr) Y_0(kb) - I_0(kb) Y_0(kr)}{I_0(ka) Y_0(kb) - I_0(kb) Y_0(ka)}}{1 + \frac{i}{\pi} \frac{W_0}{I_0(ka) H_0^{(1)}(ka) \left|1 - \frac{I_0(kb) H_0^{(1)}(ka)}{I_0(ka) H_0^{(1)}(kb)}\right|}}.$$

Таким образом, получено строгое решение задачи о рассеянии плоской электромагнитной волны на щелевом цилиндре с продольным стержнем.

Решение задачи сведено к системе (20), численный анализ которой требует применения ЭВМ.

Показано, что система уравнений (20) удовлетворяет предельным значениям параметров.

В длинноволновом приближении получены аналитические выражения для возбуждаемого поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Сологуб, С. С. Третьякова, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. ЖТФ, т. 37, вып. 10, 1967.

2. R. Barakat and E. Levin. Journal of the opt. soc. America, V. 54, № 9, 1089, 1964.

3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. Изд-во иностр. лит., 1960.

4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, т. 32, вып. 4, 1962.

5. Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. т. 2. Изд-во «Наука», 1966.