РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

В. Н. Кошпаренок, С. В. Червова

Харьков

Цилиндрический волновод с продольной щелью является одной из структур открытого типа, имеющих важное практическое применение, например, в качестве антенн вытекающих волн. Задача о распространении электромагнитных волн вдоль щелевого цилиндра уже рассматривалась в работах [1, 2], где предложены различные приближенные методы анализа таких систем. Там же показано, что распространяющиеся типы волн характеризуются комплексными постоянными распространения, определяющими затухание вдоль системы и утечку энергии через щель во внешнее пространство. В отмеченных работах, однако, отсутствует строго обоснованное решение граничной задачи.

В настоящей работе задача о распространении электромагнитных волн в щелевом волноводе решается с помощью метода, развитого в работе [3].

Рассмотрим круглый волновод радиусом a с бесконечно тонкой и идеально проводящей поверхностью. Ось цилиндра совпадает с осью oz цилиндрической системы координат (z, ρ, φ). Угловой размер щели равен 2ϑ. Середине щели соответствует $\varphi = 0$ (рис. 1). Искомое поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла, граничным условиям на металле, условиям на бесконечности и быть непрерывным во всем пространстве. Поле также периодично по координате φ, поэтому его можно представить в виде рядов Фурье

$$\vec{E} = e^{ihz} \sum_n \vec{E}_n(\rho) e^{in\varphi}; \qquad \vec{H} = e^{ihz} \sum_n \vec{H}_n(\rho) e^{in\varphi} \tag{1}$$

(множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен).

Составляющие вектор-функций $\vec{E}_n(\rho)$, $\vec{H}_n(\rho)$, найденные из уравнений Максвелла внутри волновода ($\rho < a$), равны

$$E_{nz} = g e_n^- \frac{I_n(g\rho)}{I_n(ga)}; \quad H_{nz} = g h_n^- \frac{I_n(g\rho)}{I'_n(ga)};$$

$$E_{n\varphi} = \frac{nh}{kg\rho} e_n^- \frac{I_n(g\rho)}{I_n(ga)} - i h_n^- \frac{I'_n(g\rho)}{I_n(ga)}; \tag{2}$$

$$E_{n\rho} = -\frac{n}{kg\rho} h_n^- \frac{I_n(g\rho)}{I'_n(ga)} + i h e_n^- \frac{I'_n(g\rho)}{I_n(ga)};$$

$$H_{n\varphi} = -\frac{nh}{kg\rho} h_n^- \frac{I_n(g\rho)}{I_n(ga)} + i e_n^- \frac{I'_n(g\rho)}{I_n(ga)};$$

$$H_{n\rho} = \frac{n}{kg\rho} e_n^- \frac{I_n(g\rho)}{I_n(ga)} + i h h_n \frac{I'_n(g\rho)}{I'_n(ga)},$$

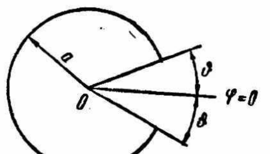

Рис. 1. Поперечное сечение круглого волновода с продольной щелью.

где h — продольное волновое число; g — поперечное волновое число; $h^2 + g^2 = k^2$; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ (λ_0 — длина волны в свободном пространстве).

Поле во внешней области ($\rho > a$) записывается в таком же виде, как и (2) с заменой e_n^-, h_n^-, $I_n(z)$, $I'_n(z)$ соответственно на e_n^+, h_n^+, $H_n^{(1)}(z)$, $H_n^{(1)'}(z)$.

Неизвестные коэффициенты e_n^-, h_n^-, e_n^+, h_n^+ должны быть подобраны таким образом, чтобы искомое поле удовлетворяло граничным условиям на металле и было непрерывным в щели, что приводит к следующим уравнениям:

$$e_n^- = e_n^+; \; h_n^- = h_n^+; \tag{3}$$

$$\sum_n e_n^- e^{in\varphi} = 0 \quad \text{(на металле)};$$

$$\frac{h}{gka} \sum_n n e_n^- e^{in\varphi} + i \sum h_n^- e^{in\varphi} = 0 \text{ (на металле)}; \tag{4}$$

$$\sum_n h_n^- \frac{1}{I_n'(ga)\, H_n^{(1)'}(ga)} \cdot e^{in\varphi} = 0 \text{ (на щели)}; \tag{5}$$

$$\frac{h}{gka} \sum_n n h_n^- \frac{e^{in\varphi}}{I_n'(ga)\, H_n^{(1)'}(ga)} + i \sum_n e_n^- \frac{e^{in\varphi}}{I_n(ga)\, H_n^{(1)}(ga)} = 0 \text{ (на щели)}.$$

Систему функциональных уравнений (4), (5) легко преобразовать к эквивалентной ей системе

$$\sum_n n e_n^- e^{in\varphi} = 0 \quad \text{(на металле)};$$

$$\sum_n e_n^- \frac{e^{in\varphi}}{I_n(ga)\, H_n^{(1)}(ga)} = 0 \text{ (на щели)}; \tag{6}$$

$$\sum_n (-1)^n e_n^- = 0;$$

$$\sum_n h_n^- e^{in\varphi} = 0 \text{ (на металле)};$$

$$\sum_n n h_n^- \frac{e^{in\varphi}}{I_n'(ga)\, H_n^{(1)'}(ga)} = 0 \text{ (на щели)}; \tag{7}$$

$$\sum_n h_n \frac{1}{I_n'(ga)\, H_n^{(1)'}(ga)} = 0.$$

В (6), (7) неизвестные e_n^- и h_n^- уже не связаны между собой. Это говорит о том, что в волноводе с продольной щелью могут раздельно существовать электрические и магнитные волны или их суперпозиция.

Введем новые неизвестные $x_n = n e_n^-$ $(n \neq 0)$, $a_0 = e_0^-$,

$$y_n = n \frac{(-1)^n h_n^-}{I_n'(ga)\, H_n^{(1)'}(ga)} \quad (n \neq 0); \; b_0 = \frac{h_0^-}{I_n'(ga)\, H_n^{(1)'}(ga)}$$

и параметры

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{1}{i\pi\, |n|\, I_n(ga)\, H_n^{(1)}(ga)}; \quad \delta_n = 1 + \frac{i\pi\,(ga)^2 I_n'(ga)\, H_n^{(1)'}(ga)}{|n|} \tag{8}$$

таким образом, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\left(\frac{1}{|n|^2}\right); \; \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0\left(\frac{1}{|n|^2}\right).$$

Тогда вместо (6) и (7) имеем

$$\sum_{n\neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0, \quad \vartheta < |\varphi| < \pi;$$

$$\sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = \frac{i}{\pi} \frac{a_0}{I_0(ga)\, H_0^{(1)}(ga)} + \sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n e^{in\varphi}, \; \vartheta > |\varphi|; \tag{9}$$

$$\sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n}{n} x_n = -a_0;$$

$$\sum_{n\neq 0} y_n e^{in\varphi'} = 0, \ \vartheta' < |\varphi'| < \pi;$$

$$\sum_{n\neq 0} y_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi'} = -i\pi (ga)^2 b_0 I_0' (ga) H_0^{(1)'} (ga) + \sum_{n\neq 0} y_n \frac{|n|}{n} \delta_n e^{in\varphi'};$$

$$\vartheta' > |\varphi'|; \tag{10}$$

$$\sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n}{n} y_n = -b_0,$$

где

$$\varphi' = \varphi - \pi; \ \vartheta' = \pi - \vartheta.$$

В работе [3] показано, что такие системы функциональных уравнений с помощью метода задачи Римана-Гильберта приводятся к эквивалентным системам линейных алгебраических уравнений

$$x_m = \frac{i}{\pi} \frac{a_0 V_{m-1}^{-1}(u)}{I_0 (ga) H_0^{(1)} (ga)} + \sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}(u); \tag{11}$$

$$-a_0 = \frac{i}{\pi} \frac{a_0 W_0 (u)}{I_0 (ga) H_0^{(1)} (ga)} + \sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_n (u);$$

$$y_m = -i\pi (ga)^2 I_0' (ga) H_0^{(1)'} (ga) V_{m-1}^{-1}(-u)\, b_0 + \sum_{n\neq 0} y_n \frac{|n|}{n} \delta_n V_{m-1}^{n-1}(-u);$$

$$-b_0 = -i\pi (ga)^2 I_0' (ga) H_0^{(1)'} (ga)\, W_0 (-u)\, b_0 + \sum_{n\neq 0} y_n \frac{|n|}{n} \delta_n W_n (-u), \tag{12}$$

где $u = \cos\vartheta$; $V_{m-1}^{n-1}(u)$ вычислены в работе [3],

$$W_0 (u) = \ln\frac{1+u}{2}; \ W_n (u) = \frac{1}{2n} [P_n (u) - P_{n-1} (u)];$$

$P_n (u)$ — полиномы Лежандра.

Однородные системы уравнений (11), (12) имеют нетривиальные решения при равенстве нулю их определителей. Приравнивая определители систем (11) и (12) нулю, получим два дисперсионных уравнения для электрических и магнитных волн. Так как ε_n и δ_n убывают как $\frac{1}{|n|^2}$, то бесконечные определители можно заменить конечными, полагая

$$\varepsilon_n = \delta_n = 0 \quad \text{при } |n| > N.$$

В общем случае решение дисперсионных уравнений затруднительно, так как требуются вычисления определителей больших порядков. В практических приложениях интересен случай узкой щели:

$$V_{m-1}^{n-1}(u) \to 0;\ W_n(u) \to 0;\ V_{m-1}^{n-1}(-u) \to 0,\ \left(n \neq \begin{cases}0\\ m\end{cases}\right);\ W_0(-u) \to \infty;$$

определитель приближенно равен

$$\Delta \approx \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_{kk}-1)\left\{1-\sum_{n\neq 0}\sum_{|m|>|n+1|}\frac{\alpha_{mn}\alpha_{nm}}{(\alpha_{mm}-1)(\alpha_{nn}-1)}\right\}, \qquad (13)$$

где

$$\alpha_{00} = -\frac{i}{\pi}\frac{W_0}{I_0(ga)H_0^{(1)}(ga)};$$

$$\alpha_{n0} = \frac{i}{\pi}\frac{V_{n-1}^{-1}(u)}{I_0(ga)H_0^{(1)}(ga)};\ \alpha_{0n} = -\frac{|n|}{n}\varepsilon_n W_n(u);\quad \alpha_{mn} = \frac{|n|}{n}\varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}(u)$$

для электрических волн и

$$\alpha_{00} = i\pi(ga)^2 I_0'(ga) H_0^{(1)\prime}(ga) W_0(-u);$$

$$\alpha_{n0} = -i\pi(ga)^2 I_0'(ga) H_0^{(1)\prime}(ga) V_{n-1}^{-1}(-u);$$

$$\alpha_{0n} = -\frac{|n|}{n}\delta_n W_n(-u);\quad \alpha_{mn} = \frac{|n|}{n}\delta_n V_{m-1}^{n-1}(-u)$$

для магнитных волн.

В дисперсионные уравнения входят произведения $(\alpha_{kk}-1)$, в которых каждый из сомножителей может обращаться в нуль. Поэтому дисперсионные уравнения распадутся на уравнения вида

$$(\alpha_{kk}-1) + \sum_{|j|>|k+1|}\frac{\alpha_{kj}\alpha_{jk}}{(\alpha_{jj}-1)} = 0, \qquad (14)$$

$$(k = 0, 1, 2\ldots)$$

$\alpha_{kj}\alpha_{jk}$ при $k \neq 0$ — малая величина, поэтому приближенно можно считать $(\alpha_{kk}-1) = 0$, и дисперсионные уравнения имеют вид

$$1 - \frac{|n|}{n}\varepsilon_n V_{n-1}^{n-1}(u) = 0;$$

$$1 - \frac{|n|}{n}\delta_n V_{n-1}^{n-1}(u) = 0. \qquad (15)$$

Для электрических волн $\alpha_{0j}\alpha_{j0}$ тоже малая величина, поэтому при $k = 0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 + \frac{i}{\pi}\frac{\ln\frac{1+u}{2}}{I_0(ga)H_0^{(1)}(ga)} = 0. \qquad (16)$$

Для магнитных волн $\alpha_{0j}\alpha_{j0}$ уже не будет малой величиной, поэтому дисперсионное уравнение в этом случае запишем в виде

$$i\pi (ga)^2 I_0'(ga) H_0^{(1)'}(ga) W_0(-u) - 1 +$$

$$+ i\pi (ga)^2 I_0'(ga) H_0^{(1)'} \sum_{n=1}^{N} \frac{V_{n-1}^{-1}(-u) W_n(-u) \delta_n \frac{|n|}{n}}{\frac{|n|}{n} \delta_n V_{n-1}^{n-1}(-u) - 1}. \qquad (17)$$

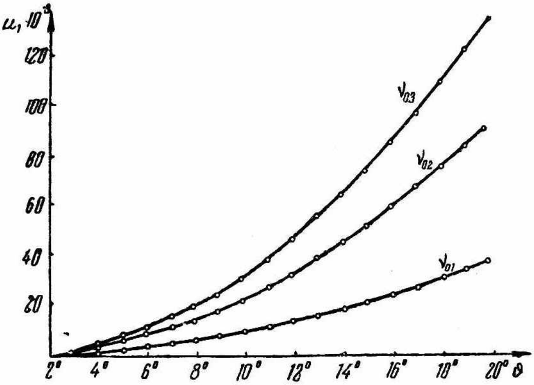

Рис. 2. Зависимость реальной части комплексной добавки к постоянной распространения от ширины щели.

Численный анализ проводился для уравнения (16). Расчеты велись на ЭВМ для значений углов раскрыва щели $\vartheta = 1^\circ \div 20^\circ$, при этом полагалось, что

$$ga = \nu_{0n} + \mu_1 + i\mu_2,$$

где ν_{0n} — корни функций $I_0(\nu_{0n}) = 0$ и μ_1, μ_2 — малые добавки. Корни дисперсионного уравнения (17) предполагались близкими к $\nu_{01} = 2{,}40483$, $\nu_{02} = 5{,}52008$, $\nu_{03} = 8{,}65373$. Результаты численного анализа приведены на рис. 2, 3, из которых видно, что μ_1, μ_2 возрастают с увеличением ширины щели, причем щель влияет на высшие моды сильнее. Затухание, определяемое величиной μ_2, возрастает с увеличением ширины щели и преобладает на более коротких длинах волн. Это объясняется тем, что с уменьшением длины волны увеличивается просачивание энергии через щель во внешнее пространство.

Корень $ga = \nu_{0n}$ соответствует одному из модов сплошного волновода, значит, при узких щелях распространяющиеся волны близки к собственным модам сплошного волновода. Таким образом, из строгого решения граничной задачи определены условия существования электромагнитных волн в волноводе со щелью.

Приведенный расчет дисперсионного уравнения (16) применим и для других дисперсионных уравнений, определяющих другие типы волн, распространяющихся в системе.

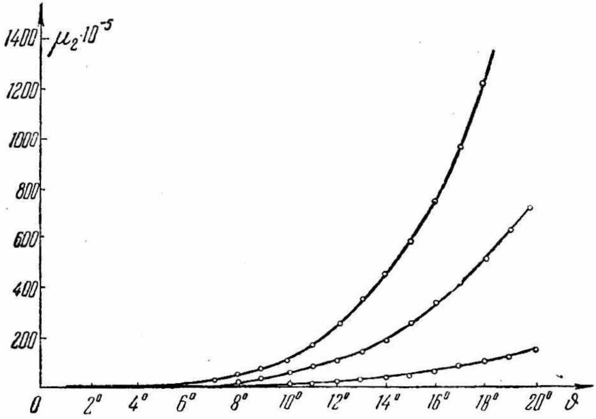

Рис. 3. Зависимость мнимой добавки к постоянной распространения от ширины щели.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. F. Harrington. J. Appl. Phys., 1953, v. 24, 1366, N 11.
2. L. O. Goldstone, A. A. Olinner. IRE Trans. on Antennas and Propagation, v. AP—9, 280, 1961, N 3.
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, т. 32, № 4, 1962.