

# РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТОНКОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ В ВОЛНОВОДЕ. Ч. II

Л. К. Гал, Н. А. Хижняк

Харьков

Рассматривается задача об отражении электромагнитных волн от тонкого  $\frac{a}{\lambda} < 1$  диэлектрического или идеально проводящего металлического цилиндра эллиптического сечения, расположенного параллельно широкой стенке прямоугольного волновода. Вычисляется коэффициент отражения  $\eta_{TE}$  основной  $TE$ -волны от цилиндра и исследуется зависимость величины  $\eta_{TE}$  от угла  $\psi$  между главными направлениями эллипса и осями  $yz$  волновода (ось  $x$  параллельна широкой стенке волновода, ось  $z$  направлена по оси волновода). Стенки волновода определяются поверхностями  $x = 0$ ,  $x = d$ ,  $y = 0$ ,  $y = h$ , координаты центра цилиндра равны  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $0$ , торцы цилиндра упираются в стенки волновода.

Для построения решений используются известные значения внутренних полей [1,2], индуцированных внутри бесконечно длинных диэлектрических и металлических эллиптических цилиндров плоской волной, падающей на цилиндр в свободном пространстве. Из рассеянных полей строится решение, удовлетворяющее граничным условиям на стенках волновода. Поле рассеянной волны выражается через электрический  $\vec{\Pi}^e$ , магнитный  $\vec{\Pi}^m$  потенциалы Герца соотношениями

$$\vec{E}_p = (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \vec{\Pi}^e - ik \mu_1 \text{rot} \vec{\Pi}^m; \quad (1)$$

$$\vec{H}_p = (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \vec{\Pi}^m + ik \varepsilon_1 \text{rot} \vec{\Pi}^e,$$

где

$$\vec{\Pi}^e = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}'; \quad (2)$$

$$\vec{\Pi}^m = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}'.$$

Известно, что элементы матричной функции Грина удовлетворяют уравнению

$$\Delta f_{ik}(|\vec{r} - \vec{r}'|) + k^2 \varepsilon_1 \mu_1 f_{ik}(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (3)$$

и соответствующим физическим условиям задачи. В данном случае рассеянная волна должна представлять собой электромагнитное поле, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям на стенках волновода.

Пользуясь общим методом построения такой функции, находим, что она является диагональной, причем

$$\begin{aligned} f_{11}^{\text{э}} = f_{1,x}^{\text{э}} &= -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{h} y' \sin \frac{n\pi}{h} y H_0^{(2)}(\gamma_n |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|); \\ f_{22}^{\text{э}} = f_{1,y}^{\text{э}} &= -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{h} y' \cos \frac{n\pi}{h} y H_0^{(2)}(\gamma_n |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|); \\ f_{33}^{\text{э}} = f_{1,z}^{\text{э}} = f_{1,x}^{\text{э}}; \quad \gamma_n &= \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2}$  функции  $f_{ik}^{\text{м}}$  определяются аналогично.

Пусть теперь на бесконечный эллиптический цилиндр с полуосями  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), ось которого параллельна оси  $x$ , падает волна

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{r}) &= \vec{E}_0(y, z) e^{-ik_x x}; \\ \vec{H}_0(\vec{r}) &= \vec{H}_0(y, z) e^{-ik_x x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда отраженная волна, а также внутреннее поле будут иметь аналогичную зависимость от переменной  $x$ .

Учитывая это, в потенциалы (2) можно подставить найденные выше значения функции Грина и предполагаемую зависимость внутреннего поля от переменной  $x$ . Выполняя интегрирование по  $x$  в бесконечных пределах для отдельной гармоник поля, получим

$$\begin{aligned} \Pi_x^{\text{э}} &= \frac{i}{k_z h} \sin \frac{n\pi}{h} y e^{-ik_x x - ik_z z} \int_S \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) \times \\ &\times E_x(y', z') \sin \frac{n\pi}{h} y' e^{ik_z z'} dy' dz'; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Pi_y^{\text{э}} &= \frac{i}{k_z h} \cos \frac{n\pi}{h} y e^{-ik_x x - ik_z z} \int_S \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E_y(y', z') \times \\ &\times \cos \frac{n\pi}{h} y' e^{ik_z z'} dy' dz'; \end{aligned}$$

$$\Pi_x^{\circ} = \Pi_z^{\circ}.$$

Заменой  $\epsilon$  на  $\mu$  и  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$  по схеме

$$\Pi_x^{\text{M}} = \Pi_y^{\circ} = \Pi_z^{\text{M}}, \quad \Pi_y^{\text{M}} = \Pi_x^{\circ} \quad (7)$$

находим компоненты магнитного потенциала Герца.

Для полей, зависящих от  $x$  в виде  $e^{ik_x x}$ , после аналогичных вычислений будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_x^{\circ} &= \frac{i}{k_z h} \sin \frac{n\pi}{h} y e^{ik_x x - ik_z z} \int_S \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) E_x(y', z') \times \\ &\quad \times \sin \frac{n\pi}{h} y' e^{ik_z z'} dy' dz'; \\ \Pi_y^{\circ} &= -\frac{i}{k_z h} \cos \frac{n\pi}{h} y e^{ik_x x - ik_z z} \int_S \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) E_y(y', z') \times \\ &\quad \times \cos \frac{n\pi}{h} y' e^{ik_z z'} dy' dz'. \end{aligned} \quad (8)$$

Если рассматривать теперь падающую волну в прямоугольном волноводе как суперпозицию двух плоских волн типа (5), для которых решения уже известны [1], то рассеянное поле будет представлять собой суперпозицию полей, описываемых потенциалами (6) и (8).

Если частота падающей волны такова, что в волноводе может распространяться только основная  $TE$ -волна, то вдали от рассеивающего тела отраженная волна будет представлять основную  $TE$ -волну. Ее  $y$ -я компонента равна

$$E_{y \text{ отр}} = k^2 \epsilon_1 \mu_1 \Pi_y^{\circ} - ik \mu_1 \left( \frac{\partial \Pi_x^{\text{M}}}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z^{\text{M}}}{\partial x} \right).$$

Определим коэффициент отражения соотношением

$$\gamma = \frac{E_{y \text{ отр}}}{E_{y \text{ пад}}}. \quad (9)$$

Так как задача решается в приближении  $\frac{a}{\lambda} < 1$ , внутреннее поле целесообразно представить в виде разложения по параметру  $\frac{a}{\lambda}$ .

Тогда потенциал Герца может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \Pi_y^{\circ} &= \frac{2S}{k_z h} \left\{ \int_S \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) E_y^{(0)} d\rho' + (ik) \int_S \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \left[ E_y^1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k_z}{k} z' E_y^{(0)} \right] d\rho' + (ik)^2 \int_S \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \left[ E_y^{(2)} - \frac{k_z}{k} z' E_y^{(1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k_z^2}{2k^2} z'^2 E_y^{(0)} \right] d\rho' \right\} \sin k_x x e^{ik_z z}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения стержня. Остальные составляющие потенциалов Герца записываются аналогично. Заметим, что в соответствии с результатами работы [1] величина  $E_y^{(0)}$  является постоянной,  $E_y^{(1)}$  — линейной, а  $E_y^{(2)}$  — квадратичной функцией декартовых координат. Интегралы от нечетной функции в симметричных пределах равны нулю, поэтому окончательно

$$E_{y \text{ отр}} = [E_y^{(0)} \text{отр} + (ik) E_y^{(2)} \text{отр}] \sin k_x x e^{ik_z z}, \quad (11)$$

где

$$E_y^{(0)} \text{отр} = \frac{2S}{k_z h} [k^2 \varepsilon_1 \mu_1 (\varepsilon - \varepsilon_1) (\alpha_{11} + \alpha_{22}) E_{0y} + k k_z (\mu - \mu_1) \times \\ \times H_{0x} + k \mu_1 k_x (\mu - \mu_1) (\beta_{11} + \beta_{22}) H_{0z}]; \\ E_y^{(2)} \text{отр} = \frac{S k_z}{4 k^2 h} (\alpha + \beta + \gamma).$$

В (11) приняты следующие обозначения:

$$\alpha_{11} = \frac{(a+b) \varepsilon_1}{a \varepsilon_1 + b \varepsilon}, \quad \beta_{11} = \frac{(a+b) \mu_1}{a \mu_1 + b \mu}, \quad (12) \\ \alpha_{22} = \frac{(a+b) \varepsilon_1}{a \varepsilon + b \varepsilon_1}, \quad \beta_{22} = \frac{(a+b) \mu_1}{a \mu + b \mu_1}.$$

Таким образом,  $E_y^{(0)} \text{отр}$  определяет рассеянное поле в приближении, аналогичном дипольному приближению в теории рассеяния электромагнитных волн на малых телах. Величина  $E_y^{(2)} \text{отр}$  определяет поправку порядка  $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$  к дипольному приближению, обусловленную конечным значением параметра  $\frac{a}{\lambda}$ . Конкретные значения величин  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в общем случае достаточно громоздки, и мы их представим через решения, приведенные в работе [1]. Согласно работе [1], при рассеянии волн на тонком диэлектрическом стержне эллиптического сечения внутренние поля имеют вид

$$E_{y \text{ вн}}^{(1)} = A_2 z + B_2 y; \\ E_{y \text{ вн}}^{(2)} = B_{11} z^2 + B_{12} z y + B_{22} y^2 + B_{00}.$$

Там же приведены системы линейных алгебраических уравнений, определяющие эти коэффициенты через поле падающей волны. Тогда по известным  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $B_{ik}$ , ... коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  представляются следующим образом:

$$\alpha = (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) [k_z k (\mu - \mu_1) H_{0x} + k_x k (\beta_{22} \sin^2 \psi + \\ + \beta_{11} \cos^2 \psi) (\mu - \mu_1) H_{0z} + k^2 \mu_1 (\alpha_{22} \cos^2 \psi + \\ + \alpha_{11} \sin^2 \psi) (\varepsilon - \varepsilon_1) E_{0y}]; \quad (13)$$

$$\beta = -\frac{2k}{k_z} \left\{ k [k_z (A'_3 a^2 \cos^2 \psi + B'_3 b^2 \sin^2 \psi) + k_x (A'_2 a^2 \sin \psi \cos \psi + B'_1 b^2 \sin \psi \cos \psi + B'_2 b^2 \sin^2 \psi + A'_1 a^2 \cos^2 \psi)] + k^2 \mu_1 (\varepsilon - \varepsilon_1) \times \right. \\ \left. \times [a^2 A_2 \cos^2 \psi - b^2 B_1 \sin^2 \psi + (B_2 b^2 - A_1 a^2) \sin \psi \cos \psi] \right\}; \\ \gamma = \frac{8k^2}{k_z^2} \left\{ k k_z (\mu - \mu_1) \left( C'_{11} \frac{a^2}{4} + C'_{22} \frac{b^2}{4} + C'_{00} \right) + \right. \\ \left. + k k_x (\mu - \mu_1) \left[ \sin \psi \left( B'_{11} \frac{a^2}{4} + B'_{22} \frac{b^2}{4} + B'_{00} \right) + \cos \psi \times \right. \right. \\ \left. \times \left( A'_{11} \frac{a^2}{4} + A'_{22} \frac{b^2}{4} + A'_{00} \right) \right] + k^2 \mu_1 (\varepsilon - \varepsilon_1) \left[ \cos \psi \left( B_{11} \frac{a^2}{4} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{22} \frac{b^2}{4} + B_{00} \right) - \sin \psi \left( A_{11} \frac{a^2}{4} + A_{22} \frac{b^2}{4} + A_{00} \right) \right] \right\}.$$

В частном случае кругового диэлектрического цилиндра ( $a = b$ ) соотношения (12) и (13) существенно упрощаются. В результате упрощений имеем

$$E_y^{(0)} = \frac{2S}{k_z h} \left\{ 2k^2 \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} E_{0y} + k k_z (\mu - \mu_1) H_{0x} + \right. \\ \left. + 2k k_x \mu_1 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} H_{0z} \right\}; \quad (14)$$

$$E_y^{(2)} = \frac{S a^2}{2k_z \mu_1 h} \left[ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} A + \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} (B + C) \right],$$

где

$$A = \frac{1}{2\varepsilon_1^2} \left\{ k_z^2 \varepsilon_1 \mu_1 [4(\varepsilon + \varepsilon_1)\mu - (\varepsilon - 3\varepsilon_1)(\mu + \mu_1)] - 4k_x^2 (\varepsilon^2 \mu_1^2 - \varepsilon_1^2 \mu^2) \right\};$$

$$B = \frac{k_z}{4k} \left\{ -k^2 \mu_1 [2\mu_1 (\varepsilon - \varepsilon_1) + \varepsilon (\mu - \mu_1)] (\mu + \mu_1) + \right. \\ \left. + 2k_x^2 (\mu - \mu_1) (2\mu + \mu_1) + k_z^2 \mu_1 (7\mu_1 - \mu) \right\};$$

$$C = \frac{k_x}{k \varepsilon_1} \left\{ k^2 \mu_1^2 (\varepsilon - \varepsilon_1) (\varepsilon \mu_1 + \varepsilon_1 \mu) + k_z^2 \mu_1 [3\varepsilon_1 \mu_1 - \right. \\ \left. - (\mu + \mu_1) (\varepsilon + 4\varepsilon_1)] - k_x^2 (\mu - \mu_1) (\varepsilon \mu_1 + \varepsilon_1 \mu) \right\}.$$

Переход к металлическому эллиптическому или круговому цилиндру осуществляется достаточно просто лишь в случае нормального падения и в нулевом по  $\frac{a}{\lambda}$  приближении (переходом  $\varepsilon \rightarrow \infty$  или  $\mu \rightarrow 0$ ). В рассматриваемой задаче этот переход значительно усложняется и его необходимо осуществлять в

соответствии с правилами, изложенными в работе [2]. Тогда для кругового металлического цилиндра

$$E_y^{(0)} = \frac{2S}{k_z h} \{ 2k^2 \epsilon_1 \mu_1 E_{0y} - k k_z \mu_1 H_{0x} - 2k_x k \mu_1 H_{0z} \}; \quad (15)$$

$$E_y^{(2)} = \frac{S k_z}{4k^2 h} (A_1 + B_1 + C_1),$$

где

$$A_1 = a^2 \{ 2k^2 \epsilon_1 \mu_1 E_{0y} - k_z k \mu_1 H_{0x} - 2k_x k \mu_1 H_{0z} \};$$

$$B_1 = -a^2 \{ -2k \epsilon_1 k_z E_{0y} + 6k_z k_x H_{0z} + (4k^2 \epsilon_1 \mu_1 +$$

$$+ k_z^2) H_{0x} \} \frac{k \mu_1}{k_z};$$

$$C_1 = \frac{k \mu_1 a^2}{k_z^2} \{ -k_z (2k^2 \epsilon_1 \mu_1 +$$

$$+ k_z^2) H_{0x} - 4k_x (k^2 \epsilon_1 \mu_1 +$$

$$+ 3k_z^2) H_{0z} + 4k \epsilon_1 (k^2 \epsilon_1 \mu_1 - 2k_z^2) E_{0y} \}.$$

Зависимость коэффициента отражения основной  $H_{10}$ -волны от угла поворота металлической ленты относительно оси волновода:

1 — зависимость  $\frac{h}{\pi b^2 k} \eta^{(2)}$  от угла  $\psi$ ;

2 — зависимость  $\frac{10h}{\pi b^4 k^3} \eta^{(2)}$  от угла  $\psi$ .

чая  $a \rightarrow 0$ , описывающего отражение основной  $TE$ -волны от металлической ленты шириной  $b$

$$E_y^{(0)} = \frac{2\pi b^2}{k_z h} (k^2 \epsilon_1 \mu_1 \cos^2 \psi E_{0y} - k k_z \mu_1 H_{0x} - k k_x \mu_1 \cos^2 \psi H_{0z});$$

$$E_y^{(2)} = \frac{\pi b^4 k_z}{4k^2 h} (A_2 + B_2 + C_2); \quad (16)$$

$$A_2 + B_2 = 2k \mu_1 (k \epsilon_1 E_{0y} - k_x H_{0z}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi,$$

где

$$C_2 = \frac{k \mu_1 k_x}{2k_z^2} [3k_x k \epsilon_1 E_{0y} - 2(k_{\perp}^2 + 2k^2 \epsilon_1 \mu_1) H_{0z}] \cos^2 \psi.$$

Соотношения (11) и (16) решают поставленную задачу.

В общем случае диэлектрического цилиндра эллиптического сечения ответ слишком громоздкий для непосредственного анализа. В случае кругового цилиндра из формулы (14) видно, что возможно резонансное рассеяние на поперечных колебаниях как электрического, так и магнитного типа. Этим рассматриваемый случай отличается от рассмотренного в ч. I. При рассеянии

волн на тонкой металлической ленте зависимость коэффициента отражения от угла между осью волновода и нормалью к ленте носит достаточно сложный характер. На рисунке представлена типичная зависимость  $\eta_{TE}(\psi)$  при  $\frac{k_{\perp}^2}{k^2} = \frac{k_z^2}{k^2} = 0,5$  как для нулевого, так и для второго приближения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Гал, Н. А. Хижняк. Рассеяние электромагнитных волн на диэлектрическом цилиндре эллиптического сечения с произвольными параметрами анизотропии. Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума по ДВ и распространению радиоволн. ЛГУ, 1970.

2. Л. К. Гал, Н. А. Хижняк. Рассеяние произвольно падающих электромагнитных волн на металлических эллиптических стержнях. Тезисы докладов Юбилейной научно-технической конференции. ХГУ, 1970.