

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТОНКОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ В ВОЛНОВОДЕ. Ч. I

Л. К. Гал, Н. А. Хижняк

Харьков

В настоящей работе решается задача об отражении электромагнитных волн от тонкого $\frac{a}{\lambda} < 1$ диэлектрического или идеально проводящего металлического цилиндра эллиптического сечения в прямоугольном волноводе. Предполагается, что рассеивающий цилиндр расположен параллельно узкой стенке волновода и торцами упирается в его широкие стенки.

Задача рассматривается на основе уравнений Максвелла в интегральной форме. Если ϵ_1 , μ_1 — проницаемости окружающей

среды, а $\varepsilon_{ik}, \mu_{ik}$ — тензоры проницаемостей цилиндра, объем которого равен V , исходные уравнения имеют вид

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \times \\ \times \hat{f}(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' - \frac{ik\mu_1}{4\pi} \text{rot} \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{f}(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}', \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \times \\ \times \hat{f}(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' + \frac{ik\varepsilon_1}{4\pi} \text{rot} \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{f}(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}'. \quad (2)$$

При решении задач по рассеянию электромагнитных волн в свободном пространстве функция f является скалярной, при решении задач по рассеянию волн в волноводах функция Грина \hat{f} заменяется матрицей f_{ik} [1], все компоненты которой удовлетворяют уравнению

$$\Delta f_{ik}(|\vec{r} - \vec{r}'|) + k^2 \varepsilon_1 \mu_1 f_{ik}(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi \delta(|\vec{r} - \vec{r}'|), \quad (3)$$

а индексы ik характеризуют разные наборы собственных функций прямоугольного волновода. Эти функции выбираются таким образом, чтобы соответствующие поля, определяемые соотношениями (1)—(2), удовлетворяли граничным условиям на стенках волновода.

При $\vec{r} \in V$ уравнения (1)—(2) являются интегральными уравнениями, определяющими внутреннее поле в рассеивающем цилиндре через поле падающей волны. В общем случае, когда размеры рассеивающего тела сравнимы с длиной рассеиваемой волны, интегральные уравнения (1)—(2) слишком сложны для непосредственного анализа, поэтому рассматривается случай, когда

$$\frac{a}{\lambda} < 1. \quad (4)$$

Найдем внутренние поля с точностью до величин $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ включительно. Тогда в приближении (4) функция Грина определится квазистатическим выражением и решения исходных уравнений (1)—(2) совпадут с внутренними полями, индуцированными падающей волной в тонком диэлектрическом цилиндре в свободном пространстве. Эти поля с точностью до величин $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ получены в работах [2, 3].

При $\vec{r} \in V$ соотношения (1)—(2) определяют полное поле вне рассеивающего цилиндра через поле в цилиндре. Рассеянное поле можно записать с помощью потенциалов Герца $\vec{\Pi}^{\circ}$ и $\vec{\Pi}^{\text{M}}$

$$\vec{E}_{\text{расс}} = (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \vec{\Pi}^{\circ} - ik \mu_1 \text{rot } \vec{\Pi}^{\text{M}}, \quad (5)$$

$$\vec{H}_{\text{расс}} = (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \vec{\Pi}^{\text{M}} + ik \varepsilon_1 \text{rot } \vec{\Pi}^{\circ}.$$

Потенциалы Герца определяются известными соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^{\circ} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{f}(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}', \\ \vec{\Pi}^{\text{M}} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{f}(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \end{aligned} \quad (6)$$

и выражаются через полученные в работах [2, 3] внутренние поля $\vec{E}(\vec{r}')$ и $\vec{H}(\vec{r}')$ и элементы функции Грина f_{ik} . В общем случае отраженная (прошедшая) волна содержит бесконечно большое число гармоник, соответствующих различным дискретным значениям поперечного волнового числа $k_{\perp mn}$. Нас интересует поле в волновой зоне на расстояниях порядка нескольких длин волн, поэтому не затухнут лишь такие волны, для которых

$$\left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 < k^2 \varepsilon_1 \mu_1, \quad (7)$$

где d и h — поперечные размеры волновода по широкой и узкой стенкам соответственно. При рассеянии на цилиндре основной TE -волны ($m=1, n=0$) на частотах $\omega = kc$, удовлетворяющих условию $k^2 \varepsilon_1 \mu_1 > \left(\frac{\pi}{d} \right)^2$, отраженная волна в волновой зоне также будет состоять из одной основной TE -волны. Решение уравнения (3) с учетом граничных условий на стенках волновода определяет следующую матрицу функции Грина [1]:

$$f_{ik}^{(\circ)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22}^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_{ik}^{\text{M}} = \begin{pmatrix} f_{11}^{\text{M}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{33}^{\text{M}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ее элементы в волновой зоне для отраженной волны

$$\begin{aligned} f_{22}^{\circ} &= -\frac{8\pi i}{dh^2 \beta_{10}} \sin k_x x' \sin k_x x e^{i\beta_{10}(z-z')}; \\ f_{33}^{\text{M}} &= -\frac{8\pi i}{dh^2 \beta_{10}} \cos k_x x' \cos k_x x e^{i\beta_{10}(z-z')}; \\ f_{11}^{\text{M}} &= f_{22}^{\circ}, \end{aligned} \quad (9)$$

где f_{ik}^{β} — элементы функции Грина, определяющие электрическое, а f_{ik}^M — магнитное поле.

Для тонких диэлектрических стержней как внутренние поля, так и элементы функции Грина, зависящие от переменной интегрирования \vec{r}' , могут быть представлены в виде разложений по малому параметру $\frac{a}{\lambda}$ (формально разложение ведется по параметру ik)

$$\vec{E}(\vec{r}') = \vec{E}^{(0)}(\vec{r}') + (ik)\vec{E}^{(1)}(\vec{r}') + (ik)^2\vec{E}^{(2)}(\vec{r}') + \dots \quad (10)$$

Тогда f_{22}^{β}

$$f_{22}^{\beta} = f_{22}^{\beta(0)} + (ik)f_{22}^{\beta(1)} + (ik)^2f_{22}^{\beta(2)} + \dots, \quad (11)$$

где

$$f_{22}^{\beta(0)} = -\frac{8\pi i}{dh\beta_{10}} \sin k_x x_0 \sin k_x x e^{i\beta_{10}z},$$

$$f_{22}^{\beta(1)} = -\frac{8\pi i}{dh\beta_{10}} \left[-\frac{ik_x}{k} x' \cos k_x x_0 - \frac{\beta_{10}}{k} z' \sin k_x x_0 \right] \sin k_x x e^{i\beta_{10}z}, \quad (12)$$

$$f_{22}^{\beta(2)} = -\frac{8\pi i}{dh\beta_{10}} \left[\frac{\beta_{10}^2}{2k^2} z'^2 \sin k_x x_0 + \frac{k_x^2}{2k^2} x'^2 \sin k_x x_0 - \frac{i\beta_{10}k_x}{k^2} x'z' \cos k_x x_0 \right] \sin k_x x e^{i\beta_{10}z}$$

($x = x_0$ и $z = 0$ — координаты центра цилиндра; $k_x = \frac{\pi}{a}$ — поперечное волновое число).

Падающая основная TE -волна имеет компоненты

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos k_x x e^{-i\beta_{10}z}; \\ H_x &= H_0 \frac{i\beta_{10}}{k_x} \sin k_x x e^{-i\beta_{10}z}; \\ E_y &= -H_0 \frac{ik_x}{k_x} \sin k_x x e^{-i\beta_{10}z}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\beta_{10} = \sqrt{k^2 \varepsilon_{11} - k_x^2}$, и через них строятся решения уравнений (1)—(2), определяющих внутреннее поле в виде разложения (10). Подставляя разложения (10)—(11) в (6), выражение для потенциала Герца представим в виде

$$\begin{aligned} \Pi_l^{\beta} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\varepsilon_{ik}}{\varepsilon_1} - 1 \right) \{ E_{kl' il'}^{\beta(0)} + (ik) E_{kl' il'}^{\beta(1)} + (ik) E_{kl' il'}^{\beta(2)} + \\ &+ (ik)^2 E_{kl' il'}^{\beta(3)} + (ik)^2 E_{kl' il'}^{\beta(4)} + (ik)^2 E_{kl' il'}^{\beta(5)} \} d\vec{r}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогичный вид имеет и магнитный потенциал Герца.

В результате вычислений амплитуда отраженной волны также представляется в виде разложения по степеням (ik) , например:

$$E_{y \text{ отр}} = -\frac{ik\mu_1}{k_x} (E_{y \text{ отр}}^0 + (ik) E_{y \text{ отр}}^1 + (ik)^2 E_{y \text{ отр}}^2) \sin k_x x e^{i\beta_{10} z}, \quad (15)$$

поэтому можно ввести понятие коэффициента отражения падающей волны от эллиптического цилиндра, определенного с точностью до величины $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$:

$$\eta = \frac{E_{y \text{ отр}}}{E_{y \text{ пад}}} = \frac{E_{y \text{ отр}}^0 + (ik) E_{y \text{ отр}}^1 + (ik)^2 E_{y \text{ отр}}^2}{E_{y \text{ пад}}}. \quad (16)$$

В результате вычислений для изотропного диэлектрического цилиндра эллиптического сечения

$$E_{y \text{ отр}}^0 = \frac{2ik^2 \varepsilon_1 \mu_1 V}{dh\beta_{10}} \left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \sin^2 k_x x_0 + (\mu - \mu_1) \Gamma_0 \right] H_0,$$

где

$$\Gamma_0 = \frac{a+b}{\varepsilon_1 \mu_1} \left[\left(\frac{\cos^2 \psi}{a\mu + b\mu_1} + \frac{\sin^2 \psi}{a\mu_1 + b\mu} \right) \left(\frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 k_x x_0 - \frac{\beta_{10}^2}{k^2} \sin^2 k_x x_0 \right) + \frac{2i\beta_{10} k_x}{k^2} \left(\frac{1}{a\mu + b\mu_1} - \frac{1}{a\mu_1 + b\mu} \right) \sin \psi \cos \psi \sin k_x x_0 \cos k_x x_0 \right], \quad (17)$$

$E_{y \text{ отр}}^1 = 0$, так как ведется интегрирование нечетной функции по площади эллипса, и

$$E_{y \text{ отр}}^2 = \frac{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 V}{2dh\beta_{10}} \left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \Gamma + (\mu - \mu_1) \Gamma_1 \right], \quad (18)$$

где Γ и Γ_1 — сложные функции частоты и полуосей эллипса, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1;$$

ψ — угол между осью x волновода и осью x эллипса в поперечном сечении цилиндра. Приводим их выражения в обозначениях работы [2]:

$$\Gamma = (\alpha a^2 A_3 + \beta b^2 B_3) + (C_{11} a^2 + C_{22} b^2 + 4C_{00} + \frac{ik\mu_1}{k_x} \gamma H_0) \sin k_x x_0;$$

$$\Gamma_1 = \left[D - C - \frac{\alpha}{\varepsilon_1 \mu_1} (B'_{11} a^2 + B'_{22} b^2 + 4B_{00}) - \frac{\beta}{\varepsilon_1 \mu_1} \times \right. \\ \left. \times (A'_{11} a^2 + A'_{22} b^2 + 4A'_{00}) \right];$$

$$D = \frac{1}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \{ \beta_{10}^2 \sin k_x x_0 [b^2 B_1' \sin^2 \psi - a^2 A_2' \cos^2 \psi + (a^2 A_1' - b^2 B_2')] \sin \psi \cos \psi + k_x^2 \sin k_x x_0 [b^2 B_1' \cos^2 \psi - a^2 A_2' \sin^2 \psi - (a^2 A_1' - b^2 B_2') \sin \psi \cos \psi] - ik_x \beta_{10} \cos k_x x_0 [(b^2 B_2' - a^2 A_1') (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) - 2(A_2' a^2 + B_1' b^2) \sin \psi \cos \psi] \};$$

$$C = \left[\frac{(a+b)\beta}{\varepsilon_1(a\mu_1 + b\mu)} (\gamma \sin \psi - \gamma_1 \cos \psi) - \frac{(a+b)\alpha}{\varepsilon_1(a\mu + b\mu_1)} \times (\gamma \cos \psi - \gamma_1 \sin \psi) \right] H_0;$$

$$\alpha = \frac{ik_x}{k} \cos k_x x_0 \sin \psi - \frac{\beta_{10}}{k} \sin k_x x_0 \cos \psi;$$

$$\beta = \frac{ik_x}{k} \cos k_x x_0 \cos \psi + \frac{\beta_{10}}{k} \sin k_x x_0 \sin \psi;$$

$$\gamma = \frac{1}{2k^2} \{ \beta_{10}^2 \sin k_x x_0 (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) + k_x^2 \sin k_x x_0 (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) + 2i\beta_{10} k_x \cos k_x x_0 (a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi \};$$

γ_1 находится из γ заменой $\sin k_x x_0$ на $\cos k_x x_0$, и наоборот. Коэффициенты A_i, B_i, A_{ik}, B_{ik} находятся решением соответствующих систем линейных уравнений, выведенных в работах [2, 3].

В случае диэлектрического цилиндра радиуса a результат чрезвычайно упрощается:

$$E_{y \text{ отр}}^0 = \frac{2ik^2 \varepsilon_1 \mu_1 V}{dh\beta_{10}} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \sin^2 k_x x_0 + \frac{2(\mu - \mu_1)}{\varepsilon_1 \mu_1 (\mu + \mu_1)} \left[\frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 k_x x_0 - \frac{\beta_{10}^2}{k^2} \sin^2 k_x x_0 \right] \right\} H_0; \quad (19)$$

$$E_{y \text{ отр}}^2 = -\frac{ik^2 \varepsilon_1 \mu_1 a^2 v}{dh\beta_{10}} [(\alpha_1 + \beta_1) \sin^2 k_x x_0 + \gamma_1] H_0,$$

где

$$\alpha_1 = \mu_1 \frac{2\varepsilon\mu^2 - 4\varepsilon_1\mu_1(\mu - \mu_1)}{(\mu + \mu_1)^2} - \varepsilon_1\mu_1;$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4} \left[\varepsilon_1\mu_1 \frac{3\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} (\varepsilon\mu - 2\varepsilon_1\mu_1) \right];$$

$$\gamma_1 = \frac{k_x^2}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \left[2 \frac{\beta_{10}^2}{k^2} \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) - \alpha_1 \right].$$

Из этих соотношений видно, что величина $E_{y \text{ отр}}^2$ пропорциональна a^2 , поэтому найденная поправка действительно пропорциональна величине $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$.

В частном случае диэлектрического кругового цилиндра с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_1$ коэффициент отражения принимает особенно простой вид:

$$\eta = \frac{2ik^2\varepsilon_1\mu_1V}{dh\beta_{10}} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \sin^2 k_x x_0 + (ka)^2 \frac{1}{2} \left[\left(\varepsilon\mu_1 - \frac{3}{4} \varepsilon_1\mu_1 - \frac{\varepsilon^2\mu_1}{4\varepsilon_1} \right) \sin^2 k_x x_0 - \frac{k_x^2}{k^2\varepsilon_1\mu_1} \left(\frac{\varepsilon\mu_1}{2} - \varepsilon_1\mu_1 \right) \right] \right\}. \quad (20)$$

Для дальнейшего важно привести также выражение для коэффициента отражения основной TE -волны от магнитного цилиндра с проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_i$. Тогда

$$\eta = \frac{2ik^2\varepsilon_1\mu_1V}{dh\beta_{10}} \left\{ \frac{2(\mu - \mu_1)}{\varepsilon_1\mu_1(\mu + \mu_1)} \left(\frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 k_x x_0 - \frac{\beta_{10}^2}{k^2} \sin^2 k_x x_0 + (ka)^2 \frac{1}{2} [(x_1 + \beta_1) \sin^2 k_x x_0 + \gamma_1] \right) \right\}. \quad (21)$$

Предельный переход к задаче о рассеянии волн на металлическом цилиндре в прямоугольном волноводе выполняется по схеме, описанной в работе [3]. Заметим лишь, что поскольку длина цилиндра не мала по сравнению с длиной волны, нельзя проводить в формулах (18)–(20) формальный переход $\varepsilon \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0$. Выполняя вычисления по схеме, изложенной в [3], получим следующие результаты.

Для кругового металлического цилиндра

$$\eta = \frac{4ik^2\varepsilon_1\mu_1V}{dh\beta_{10}} \left\{ \left[\frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 k_x x_0 - \frac{\beta_{10}^2}{k^2} \sin^2 k_x x_0 \right] \times \left(1 + \frac{9}{8} (ka)^2 \varepsilon_1\mu_1 \right) + (\beta_{10}^2 - k_x^2) (ka)^2 \frac{k_x^2}{k^2} \right\}. \quad (22)$$

Полагая, что одна из полуосей эллиптического цилиндра равна нулю ($a = 0$), получим коэффициент отражения основной TE -волны от металлической ленты шириной b , повернутой на угол ψ относительно оси волновода и расположенной вдоль узкой стороны волновода. В результате вычислений имеем

$$\eta = \frac{2i\pi b^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{d\beta_{10}} \left\{ \sin^2 \psi \left(\frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 k_x x_0 - \frac{\beta_{10}^2}{k^2} \sin^2 k_x x_0 \right) - \frac{i\beta_{10}k_x}{k^2} \sin 2\psi \sin 2k_x x_0 + \frac{1}{8} (kb)^2 \varepsilon_1 \mu_1 [\gamma_0^2 + 3\beta(\delta - \alpha)] \right\}, \quad (23)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \left[\frac{\beta_{10}^2}{k^2} \sin^2 \psi + \frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 \psi \right] \sin k_x x_0, \\ \delta = \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_{10}}{k\varepsilon_1\mu_1} \gamma \sin \psi + \frac{ik_x}{k\varepsilon_1\mu_1} \gamma_1 \cos \psi \right),$$

а величины α , β , γ и γ_1 определены в (18). Из (23) следует, что диафрагма, ориентированная по оси волновода $\psi = 0$, обладает малым коэффициентом отражения, имеющим порядок $(kb)^4$ и по сравнению с диафрагмой, ориентированной поперек волновода $\psi = \frac{\pi}{2}$, имеет коэффициент отражения в $(kb)^2$ раз меньший.

В случае круглых диэлектрических стержней, изготовленных из диэлектрика с большим значением диэлектрической проницаемости ϵ можно получить решение задачи, не предполагая, что $ka\sqrt{\epsilon} \ll 1$ и достаточно лишь считать $ka \ll 1$. Для этого выпишем коэффициент отражения падающей волны от круглого диэлектрического стержня в дипольном приближении

$$\eta = \frac{2ik^2\epsilon_1\mu_1V}{dh\beta_{10}} \left\{ \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \sin^2 k_x x_0 + \frac{2(\mu - \mu_1)}{\epsilon_1\mu_1(\mu + \mu_1)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 k_x x_0 - \frac{\beta_{10}^2}{k^2} \sin^2 k_x x_0 \right] \right\}. \quad (24)$$

Как показано в работе [4], при рассматриваемой ориентации диэлектрического стержня переход к случаю больших ϵ сводится к замене магнитной проницаемости μ на векторную величину $\mu_{эфф}$, равную

$$\mu_{эфф} = \mu F(ka\sqrt{\epsilon}). \quad (25)$$

При ориентации стержня вдоль широкой стенки волновода аналогичное изменение испытывает величина ϵ . Функция $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{2I_1(x)}{x[I_0(x) - I_2(x)]}, \quad (26)$$

где $I_\nu(x)$ — функция Бесселя ν -го порядка. Из (26) следует, что $F(x)$ изменяется в неограниченных пределах, принимая как положительные, так и отрицательные значения. Из (24) следует, что в некоторых точках, определяемых условием $\mu F(ka\sqrt{\epsilon}) + \mu_1 = 0$, коэффициент отражения принимает большие значения, соответствующие резонансному отражению волн. Аналогичное резонансное рассеяние волн от сферической неоднородности в прямоугольном волноводе теоретически и экспериментально изучено в работе [5]. Из (24) видно, что при рассеянии волн на диэлектрическом стержне, ориентированном параллельно узкой стенке волновода, могут иметь место лишь резонансы магнитного типа. Это обусловлено тем, что только магнитное поле имеет компоненты, нормальные к оси цилиндра.

Насколько нам известно, резонансное отражение волн от цилиндрической неоднородности рассматриваемого типа экспериментально никем не изучалось, хотя это явление представляет интерес для многих приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Хижняк. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
2. Л. К. Гал, Н. А. Хижняк. Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума по ДВ и распространению радиоволн. ЛГУ, 1970.
3. Л. К. Гал, Н. А. Хижняк. Тезисы докладов юбилейной научно-технической конференции. Радиофизический факультет ХГУ, 1970.
4. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 29, 1959.
5. А. И. Козарь, Н. А. Хижняк. УФЖ, 14, 1970.