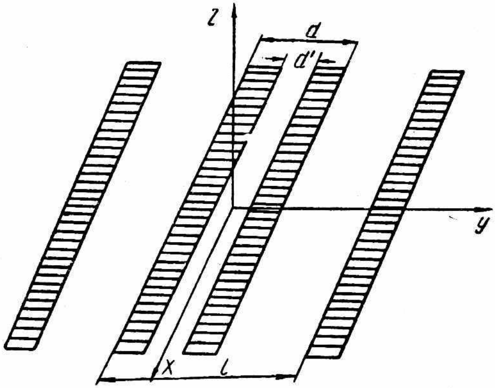
ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ РЕШЕТКЕ

Н. С. Бутенко, Л. Н. Литвиненко

Харьков

Радиофизика и радиоэлектроника широко осваивает для практического применения миллиметровый диапазон длин волн. В связи с этим возрос интерес к вопросам дифракции электромагнитных волн на плоских многоэлементных периодических решетках. Развита строгая теория для решения задач дифракции волн на металлических решетках, размеры которых соизмеримы с длиной волны. Данная статья посвящена обоснованию длинноволновой асимптотики решения.



Разнощелевая двухэлементная решетка.

Постановка задачи. В плоскости xoy (рисунок) расположена периодическая разнощелевая решетка, которая образована бесконечно тонкими и идеально проводящими металлическими лентами, параллельными оси ox.

Сверху ($Z > 0$) на эту решетку нормально падает плоская электромагнитная волна, не имеющая составляющей H_x (E-поляризованная волна):

$$E_x = e^{-ikz} e^{-i\omega t};$$

$$H_x = 0.$$

Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке. Воспользовавшись соображениями симметрии и периодичностью решетки, можем записать искомые поля в виде рядов Фурье:

$$E_{x_1} = e^{-ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{ih_n y} \qquad (z > 0);$$

$$E_{x_2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{ih_n y}, \qquad (z < 0),$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{\varkappa^2 - h_n^2}; \quad \varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad h_n = \frac{2\pi n}{l};$$

λ — длина волны в свободном пространстве.

Временной множитель ($e^{-i\omega t}$) здесь и дальше опускаем. Введем обозначения

$$X_m = mb_m;$$

$$\varepsilon_n = 1 + i\sqrt{\frac{\varkappa^2}{n^2} - 1} \qquad (n \neq 0).$$

Используя граничные условия для полей на щелях и металлических лентах решетки и метод задачи Римана — Гильберта [1], можно получить бесконечную систему алгебраических уравнений для искомых X_m

$$\begin{cases} X_m = i\varkappa b_0 \omega_m^0 - i\varkappa\omega_m^0 + \sum\limits_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n \omega_m^n & (m \neq 0) \\ -b_0 = i\varkappa b_0 W_\sigma^0 - i\varkappa W_\sigma^0 + \sum\limits_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_\sigma^n. \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты этой системы выражаются через некоторые полиномы $Q_n(u, v)$; $Q_\sigma^k(u, v)$; $\tilde{Q}_\sigma^k(u, v)$; $\mu_n(u, v)$ ($u = \cos\theta$, $v = \cos\theta'$) следующим образом (в дальнейшем аргументы полиномов $Q_n(u, v)$ и $\mu_n(u, v)$ подразумеваются):

$$V_m^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum\limits_{p=0}^{n+2} \mu_{n-p+2} Q_{p-m-2} & (n \geqslant 0), \\ \frac{1}{2} [Q_{m-1} + \mu_1 Q_m - Q_{m+1}] & (n = -1), \\ -\frac{1}{2} [-Q_m + \mu_1 Q_{m+1} + Q_{m+2}] & (n = -2), \\ -\frac{1}{2} \sum\limits_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-p} Q_{m+p+1} & (n \leqslant -2); \end{cases} \tag{2}$$

$$V_\sigma^n+V_\sigma^{-n}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\mu_{n+2}Q_\sigma+\mu_{n+1}Q_\sigma^{-1}-\mu_nQ_\sigma-2\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_{n-k}Q_\sigma^k\right] & (n>0),\\ \frac{1}{2}\left[(\mu_2-\mu_0)\,Q_\sigma+\mu_1Q_\sigma^{-1}\right] & (n=0),\\ \frac{1}{2}\left[(\mu_2-1)\,Q_\sigma^{-1}+\mu_3Q_\sigma-2Q_\sigma^{-1}\right] & (n=1),\\ \frac{1}{2}\left[\mu_3Q_\sigma^{-1}+(\mu_1+\mu_2-1)\,Q_\sigma-2\mu_1Q_\sigma^1+2Q_\sigma^2\right] & (n=2);\end{cases}\tag{3}$$

$$\tilde V_\sigma^n+\tilde V_\sigma^{-n}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[(\mu_{n+2}+\mu_n)\,\tilde Q_\sigma+\mu_{n+1}\tilde Q_\sigma^{-1}\right] & (n>0),\\ \frac{1}{2}\left[(\mu_2-\mu_0)\,\tilde Q_\sigma+\mu_1\tilde Q_\sigma^{-1}\right] & (n=0),\\ \frac{1}{2}\left[(\mu_3+2\mu_1)\,\tilde Q_\sigma+(\mu_2-1)\,\tilde Q_\sigma^{-1}\right] & (n=1),\\ \frac{1}{2}\left[(\mu_4+\mu_2-1)\,\tilde Q_\sigma+\mu_3\tilde Q_\sigma^{-1}\right] & (n=2);\end{cases}\tag{4}$$

$$\omega_m^n+\omega_m^{-n}=W_m^n+W_m^{-n}-\frac{Q_{m-1}}{\tilde Q_\sigma^{-1}}\left(\tilde W_\sigma^n+\tilde W_\sigma^{-n}\right);$$

$$W_m^n+W_m^{-n}=V_m^n+V_m^{-n}-Q_m\left(V_0^n+V_0^{-n}\right);$$

$$\tilde W_\sigma^n+\tilde W_\sigma^{-n}=\tilde V_\sigma^n+\tilde V_\sigma^{-n}-\tilde Q_\sigma\left(V_0^n+V_0^{-n}\right);\tag{5}$$

$$W_\sigma^n+W_\sigma^{-n}=V_\sigma^n+V_\sigma^{-n}-Q_\sigma\left(V_0^n+V_0^{-n}\right).$$

Полиномы Q_n и μ_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям соответственно:

$$(n+1)\,Q_{n+1}-(2n+1)\,(u+v)\,Q_n+2n\,(1+2uv)\,Q_{n-1}-$$
$$-(2n-1)\,(u+v)\,Q_{n-2}+(n-1)\,Q_{n-3}=0\qquad(n\geqslant 0);\tag{6}$$

$$\mu_n=Q_n-2\,(u+v)\,Q_{n-1}+2\,(1+2uv)\,Q_{n-2}-$$
$$-2\,(u+v)\,Q_{n-3}+Q_{n-4};$$
$$\mu_0=1;\ \mu_1=-(u+v);\ \mu_2=-\frac{1}{2}(u^2+v^2)+uv+1;\tag{7}$$
$$\mu_3=-\frac{1}{2}(u^3+v^3)+\frac{1}{2}uv\,(u+v).$$

Интегральные представления полиномов Q_n, Q_σ^k, $\tilde Q_\sigma$, $\tilde Q_\sigma^{-1}$ имеют вид

$$Q_n=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{\theta'}\frac{\cos(n+1)\,\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-u}\,\sqrt{\cos\varphi-v}}-\int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{\cos(n+1)\,\varphi d\varphi}{\sqrt{u-\cos\varphi}\,\sqrt{v-\cos\varphi}}\right];\tag{8}$$

$$Q_{-n} = Q_{n-2}; \quad Q_{-1} = 0;$$

$$Q_{\sigma}^{k} = \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{0}^{\theta'} \frac{\sin(k+1)\varphi\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{\cos\varphi - v}} - \int\limits_{\theta}^{\pi} \frac{(\pi-\varphi)\sin(k+1)\varphi\varphi d\varphi}{\sqrt{u-\cos\varphi}\sqrt{v-\cos\varphi}}\right]; \tag{9}$$

$$\widetilde{Q}_{\sigma} = \int\limits_{0}^{\theta'} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{\cos\varphi - v}} d\varphi - \delta; \quad \delta = \frac{\theta' + \theta}{2}; \tag{10}$$

$$\widetilde{Q}_{\sigma}^{-1} = \int\limits_{0}^{\theta'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{\cos\varphi - v}}. \tag{11}$$

Для последующих вычислений нам потребуется оценка такого интеграла:

$$I = \int\limits_{\theta'}^{\theta} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{v - \cos\varphi}} d\varphi. \tag{12}$$

Вводя замену переменных $x = \cos\varphi$ и вынося за знак интеграла максимальное значение одного из корней, можно записать

$$I \leqslant \frac{1}{\sqrt{v-u}} \int\limits_{v}^{\frac{u+v}{2}} \frac{dx}{\sqrt{v-x}} + \frac{1}{\sqrt{v-u}} \int\limits_{\frac{u+v}{2}}^{u} \frac{dx}{\sqrt{x-u}} \leqslant 4. \tag{13}$$

Оценим теперь полином μ_n. Используя (6) и (7), получим

$$\mu_{n+1} = \frac{(Q_{n-3} - Q_{n+1}) - (u+v)(Q_{n-2} - Q_n)}{n}.$$

Для полиномов Q_n с положительным индексом справедливо следующее интегральное представление [2]:

$$Q_{n-1} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\theta'}^{\theta} \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{v - \cos\varphi}} d\varphi. \tag{14}$$

Тогда

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{n\pi}\left[\int\limits_{\theta'}^{\theta} \frac{\sin(n-2)\varphi - \sin(n+2)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{v - \cos\varphi}} d\varphi - \right.$$

$$\left. - (u+v)\int\limits_{\theta'}^{\theta} \frac{\sin(n-1)\varphi - \sin(n+1)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{v - \cos\varphi}} d\varphi \right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int\limits_{\theta'}^{\theta} \frac{-\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - u}\sqrt{v - \cos\varphi}} \{\cos n\varphi\,[2\cos\varphi - (u+v)]\}\, d\varphi.$$

Максимальное значение величины $[2\cos\varphi-(u+v)]$ на интервале изменения φ от θ' до θ равно $(v-u)$. Следовательно,

$$|\mu_{n+1}| \leqslant 2\frac{|v-u|}{|n|\pi}\left|\int\limits_{\theta'}^{\theta}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-u}\sqrt{v-\cos\varphi}}\,d\varphi\right|.$$

Учитывая (13), имеем

$$|\mu_{n+1}| \leqslant \frac{8}{\pi}\frac{|v-u|}{|n|}. \tag{15}$$

Получим оценку полинома Q_{n-1} для любых n. Будем исходить из интегрального представления (8)

$$Q_{n-1}=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{\theta'}\frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-u}\sqrt{\cos\varphi-v}}-\int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sqrt{u-\cos\varphi}\sqrt{v-\cos\varphi}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{v-u}}\left[\int\limits_0^{\theta'}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-u}}-\int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{v-\cos\varphi}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{v-u}}\left[\int\limits_1^{v}\frac{dz}{\sqrt{z-v}\sqrt{1-z^2}}-\int\limits_u^{1}\frac{dz}{\sqrt{u-z}\sqrt{1-z^2}}\right].$$

С помощью известных равенств

$$\int\limits_1^{v}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{z-v}}=\sqrt{2}F\left(\frac{\pi}{2};\ \sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)=\sqrt{2}K\left(\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)\leqslant 2\sqrt{2}$$

$$(v\geqslant 0;\ u\leqslant 0),$$

окончательно получим

$$|Q_{n-1}|\leqslant\frac{2}{\sqrt{v-u}}\quad \begin{matrix} v\geqslant 0\\ u\leqslant 0.\end{matrix} \tag{16}$$

Аналогично можно показать, что для полиномов Q_σ^k; $\tilde{Q}_\sigma$ и Q_σ^{-1} справедливы оценки

$$|Q_\sigma^k|\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{|\sqrt{v-u}|}; \tag{17}$$

$$\left|\tilde{Q}_\sigma^{-1}\right|\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{|\sqrt{v-u}|}; \tag{18}$$

$$\left|\tilde{Q}_\sigma^{-1}\right|\geqslant\frac{\theta'}{\sqrt{2}}; \tag{19}$$

$$\left|\tilde{Q}_\sigma\right|\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{v-u}}. \tag{20}$$

Исследование решения. Положим

$$Q=\max_{m\neq 0}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(\omega_m^n+\omega_m^{-n}).$$

Для ε_n имеет место неравенство

$$|\varepsilon_n|\leqslant\frac{\varkappa^2}{|n|^2}. \tag{21}$$

Из (2)—(5) находим, что

$$W_m^n+W_m^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n+2}\mu_{n-p+2}(Q_{p-m-2}-Q_{m+p-2})+\frac{1}{2}\mu_{n+1}Q_{m-1};$$

$$W_m^1+W_m^{-1}=\frac{1}{2}[Q_{m-1}-Q_{m+1}+\mu_2Q_{m-1}+\mu_1Q_{m-2}+\mu_0Q_{m-3}];$$

$$W_m^2+W_m^{-2}=\frac{1}{2}[Q_m+\mu_1(Q_{m+1}+Q_{m-3})-Q_{m+2}+$$
$$+Q_{m-4}+\mu_3Q_{m-1}+\mu_2(Q_{m-2}-Q_m)];$$

$$\widetilde{W}_\sigma^n+\widetilde{W}_\sigma^{-n}=\frac{1}{2}\left[\mu_{n+2}\widetilde{Q}_\sigma+\mu_{n+1}\left(\widetilde{Q}_\sigma-\widetilde{Q}_\sigma^{-1}\right)\right];$$

$$\widetilde{W}_\sigma^1+\widetilde{W}_\sigma^{-1}=\frac{1}{2}\left[\mu_1\widetilde{Q}_\sigma+(\mu_2-1)\widetilde{Q}_\sigma^{-1}\right];$$

$$\widetilde{W}_\sigma^2+\widetilde{W}_\sigma^{-2}=\frac{1}{2}\left[\mu_3\widetilde{Q}_\sigma^{-1}-\widetilde{Q}_\sigma\right].$$

Воспользовавшись интегральными представлениями полиномов Q_n (8) и (14), оценкой этих полиномов (16), а также оценками (13), (16)—(20), получим

$$|W_m^n+W_m^{-n}|\leqslant\sqrt{v-u}\left|C'+C''\ln n+C'''\frac{1}{n}\right|;$$

$$\left|\widetilde{W}_\sigma^n+\widetilde{W}_\sigma^{-n}\right|\leqslant C\frac{\sqrt{v-u}}{|n|}, \tag{23}$$

где C; C'; C''; C''' — некоторые константы. Учитывая оценки (21) и (23), можно показать, что

$$q\leqslant C_1\varkappa^2\sqrt{v-u}. \tag{24}$$

В условиях длинноволнового приближения, когда $\varkappa\ll 1$, величина q мала. Будем считать, что $q<1$. В этом случае приближенное решение системы (1) с оценкой погрешности можно получить методом последовательных приближений. Ограничиваясь первым приближением, получим

$$X_m^{(1)}=i\varkappa b_0\omega_m^0-i\varkappa\omega_m^0+\theta(b_0-1)\quad(m\neq 0);$$

$$|\theta|\leqslant\frac{q}{1-q}\max_{m\neq 0}|i\varkappa\omega_m^0|\leqslant C_2\frac{q}{1-q}\frac{\varkappa}{\sqrt{v-u}}. \tag{25}$$

Подставляя найденное значение $X_m^{(1)}$ в уравнение (1б) и решая его относительно b_0, найдем, что

$$b_0 = \frac{i\varkappa W_\sigma^0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(W_\sigma^n + W_\sigma^{-n}\right)\left(i\varkappa\omega_n^0 + \theta\right)}{1 + i\varkappa W_\sigma^0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(W_\sigma^n + W_\sigma^{-n}\right)\left(i\varkappa\omega_n^0 + \theta\right)} = \frac{i\varkappa\left(W_\sigma^0 + A\right)}{1 + i\varkappa\left(W_\sigma^0 + A\right)},$$

где

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(W_\sigma^n + W_\sigma^{-n}\right)\left(\omega_n^0 + \theta\right); \quad \theta' = \frac{\theta}{i\varkappa}. \tag{26}$$

Решение в нулевом приближении имеет вид

$$b_0^{(0)} = \frac{i\varkappa W_\sigma^0}{1 + i\varkappa W_\sigma^0}. \tag{27}$$

Оценим относительную погрешность нулевого приближения

$$\frac{b_0 - b_0^{(0)}}{b_0} = \frac{\dfrac{i\varkappa\left(W_\sigma^0 + A\right)}{1 + i\varkappa\left(W_\sigma^0 + A\right)} - \dfrac{i\varkappa W_\sigma^0}{1 + i\varkappa W_\sigma^0}}{\dfrac{i\varkappa W_\sigma^0 + A}{1 + i\varkappa\left(W_\sigma^0 + A\right)}}.$$

Величина $\left|W_\sigma^n + W_\sigma^{-n}\right|$ оценивается аналогично $\left|\tilde{W}_\sigma^n + \tilde{W}_\sigma^{-n}\right|$. В результате получаем

$$\left|W_\sigma^n + W_\sigma^{-n}\right| \leqslant \left|\sqrt{v - u}\right| \left|B' \ln n + B''\right|,$$

B' и B'' — некоторые константы.
Отсюда и из формул (25) и (26) следует, что

$$|A| \leqslant C_3 \varkappa^2 \frac{1}{1 - q}, \tag{28}$$

где константа C_3 не зависит от параметров задачи при условии $v \geqslant 0$; $u \leqslant 0$.

Следует отметить, что двухэлементную разнощелевую решетку целесообразно использовать именно при таких ограничениях на параметры.

Полученная оценка (28) показывает, что решение в нулевом приближении (27) имеет погрешность, совпадающую по порядку величины с погрешностью релеевского приближения для одноэлементной решетки [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, 381, 1962.
2. Л. Н. Литвиненко. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1966.
3. Е. Н. Подольский. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1966.