

ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЬЦЕВОГО СПИРАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ВОЛНОВОДА ДИПОЛЕМ

С. И. Лапта

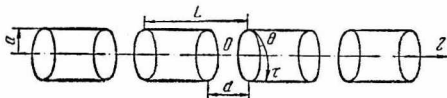
Харьков

Кольцевой спирально проводящий волновод является упрощенной моделью секционированного спирального волновода и представляет собой бесконечную периодическую последовательность одинаковых аксиально симметричных колец, стенки которых бесконечно тонкие и идеально проводящие в спиральном и непроводящие в перпендикулярном к нему направлении. Подобные волноводы, по-видимому, впервые были рассмотрены Доддсом и Петером в работе [1]. Позже В. С. Михалевский и Д. Н. Венеровский экспериментально показали, что в секционированном спиральном волноводе могут существовать медленные волны и что такие замедляющие системы удобно применять в генераторах бегущей волны [2]. Кроме того, секционированный спиральный волновод может быть применен как передающая линия, близкая к сплошному волноводу и обладающая большей дисперсией по сравнению с кольцевым и спиральным волноводами. В связи с

этим исследуем кольцевой спирально проводящий волновод, основываясь на строгом решении соответствующей электродинамической граничной задачи.

Рассмотрим задачу о возбуждении такого волновода электрическим или магнитным диполем, расположенным на оси волновода. Моменты диполей считаем направленными по оси волновода и по величине равными единице.

Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z так, чтобы ось Oz совпала с осью волновода, а начало координат было равноудалено от двух ближайших к нему колец. На рисунке показаны принятые обозначения (τ — направление, θ — угол спиральной проводимости).



Подробно рассмотрим задачу о возбуждении волновода магнитным диполем. В случае электрического диполя задача решается аналогично. Пусть магнитный диполь находится в начале координат. В свободном пространстве он возбуждает поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 , которое по известным формулам может быть представлено через магнитный вектор Герца с единственной отличной от нуля z -составляющей $\Pi_0^m(\rho, z) = \frac{e^{ikr}}{r} \left(r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, k = \frac{\omega}{c} \right)$. Здесь и далее использованы комплексные амплитуды; временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен.

Будем искать поле \vec{E}, \vec{H} , возбуждаемое диполем в присутствии волновода в виде $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1$. При этом поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 должно удовлетворять

- 1) однородной системе уравнений Максвелла всюду вне колец;
- 2) условиям излучения и конечности энергии;
- 3) граничным условиям на кольцах следующего типа $E_{1\tau} = -E_{0\tau}, H_{1\tau}$ непрерывно.

Поле диполя в присутствии волновода \vec{E}, \vec{H} удобно искать с помощью электрического и магнитного векторов Герца с единственными отличными от нуля z -составляющими, которые представим в виде

$$\Pi^e(\rho, z) = \Pi_1^e(\rho, z),$$

$$\Pi^m(\rho, z) = \Pi_0^m(\rho, z) + \Pi_1^m(\rho, z).$$

Учитывая представление

$$\Pi_0^m(\rho, z) = \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\rho_0 z) e^{i\lambda z} d\lambda,$$

периодичность волновода по z с периодом L , условия 1, 2, а также непрерывность тангенциальных составляющих электрического поля на всем цилиндре $\rho = a$, функции $\Pi_1^{e, m}$ удобно искать в виде

$$\Pi_1^{e, m}(\rho, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_1^{(1)}(p_0 a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{e, m}(\lambda) G_{e, m}(p_n; \rho, a) e^{i h_n z} d\lambda. \quad (1)$$

Здесь мы ввели такие обозначения:

$$G_e(p_n; \rho, a) = \begin{cases} H_0^{(1)}(p_n a) J_0(p_n \rho), & \rho \leq a; \\ J_0(p_n a) H_0^{(1)}(p_n \rho), & \rho \geq a; \end{cases} \quad (2)$$

$$- G_m(p_n; \rho, a) = \begin{cases} H_1^{(1)}(p_n a) J_0(p_n \rho), & \rho \leq a; \\ J_1(p_n a) H_0^{(1)}(p_n \rho), & \rho \geq a; \end{cases}$$

$J_n(y)$ и $H_n^{(1)}(y)$ — функции Бесселя 1-го и 3-го рода соответственно; $h_n = \lambda + \frac{2\pi n}{L}$; $p_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}$; выбрана та ветвь корня, для которой $\text{Im } p_n > 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль вещественной оси.

Оставшиеся граничные условия (непрерывность H_r на всем цилиндре $\rho = a$, непрерывность H_φ и H_z на дополнении колец и равенство нулю E_r на кольцах) будут выполнены, если коэффициенты $\alpha_n^{e, m}(\lambda)$ удовлетворяют следующей системе функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^m p_n e^{i h_n z} = 0, \quad (\text{на дополнении колец}); \quad (3)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^m p_n [\text{tg}^2 \theta p_n^2 a^2 J_0(p_n a) H_0^{(1)}(p_n a) + k^2 a^2 J_1(p_n a) H_1^{(1)}(p_n a)] e^{i h_n z} = i k^2 a^2 p_0 e^{i h_n z}, \quad (\text{на кольцах}); \quad (3')$$

$$\alpha_n^e = \text{tg} \theta \frac{p_n}{i k} \alpha_n^m. \quad (3'')$$

Используя асимптотические формулы для функций Бесселя [3], можно показать, что при $|n| \rightarrow \infty$

$$p_n^2 a^2 J_0(p_n a) H_0^{(1)}(p_n a) = \frac{i |h_n| a}{\pi} \left[1 + \frac{1 - 4k^2 a^2}{8h_n^2 a^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right]; \quad (4)$$

$$J_1(p_n a) H_1^{(1)}(p_n a) = \frac{1}{i\pi |h_n| a} \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Система функциональных уравнений (3), (3') может быть приведена к виду, рассмотренному в работе [4]. В зависимости от поведения функции $\text{tg}^2 \theta p_n^2 a^2 J_0(p_n a) H_0^{(1)}(p_n a) + k^2 a^2 J_1(p_n a) H_1^{(1)}(p_n a)$ при больших $|n|$ это следует делать по-разному при $\theta \neq 0$ и при $\theta = 0$. Из асимптотических представлений (4) видно, что

при больших $|n|$ эта функция при $\theta \neq 0$ ведет себя как $|n|$, в то время как при $\theta = 0$ она есть $O\left(\frac{1}{|n|}\right)$. При $\theta = 0$ система (3), (3') совпадает с уравнениями задачи о возбуждении обычного кольцевого волновода магнитным диполем, расположенным на его оси [5]. Поэтому в дальнейшем считаем $\theta \neq 0$.

Систему (3), (3') можно привести к виду (10) [4], определяя величины $\tilde{\varepsilon}_n$ равенствами ($\tilde{\varepsilon}_n = O(n^{-2})$ при $|n| \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} p_n^2 a^2 J_0(p_n a) H_0^{(1)}(p_n a) + k^2 a^2 \operatorname{ctg}^2 \theta J_1(p_n a) H_1^{(1)}(p_n a) = \\ = \frac{i h_n a}{\pi} \frac{|n|}{n} \left(1 - \tilde{\varepsilon}_n\right) \quad (-\infty < n < \infty). \end{aligned}$$

Однако при больших $\operatorname{ctg} \theta \tilde{\varepsilon}_n$ велики, что неудобно при численном и аналитическом исследовании получаемых уравнений. Поэтому поступим следующим образом. Введем величины ε_n по формуле

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = 1 + \frac{i\pi}{a} \frac{|n|}{n} \frac{h_n}{(h_n^2 - s^2)} [p_n^2 a^2 J_0(p_n a) H_0^{(1)}(p_n a) + \\ + k^2 a^2 \operatorname{ctg}^2 \theta J_1(p_n a) H_1^{(1)}(p_n a)], \quad (-\infty < n < \infty). \end{aligned}$$

Здесь

$$s^2 = \frac{8k^2 a^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + 4k^2 a^2 - 1}{8a^2}.$$

Используя асимптотические представления (4), можно показать, что

$$|\varepsilon_n| < C \Delta^4 \frac{1 + \chi^4}{\sin^2 \theta (n + \nu)^2 |\Delta^2 a^2 s^2 - (n + \nu)^2|}, \quad (5)$$

где $\Delta = \frac{L}{2\pi a}$, $\nu = \frac{\lambda L}{2\pi}$, $\chi = ka$ и C — абсолютная постоянная. Заметим, что при $\theta \rightarrow 0$ $\varepsilon_n = O(n^{-2})$, когда $|n| \rightarrow \infty$.

Продифференцируем уравнение (3) по z и учтем равенство, которое получается из него при $z = 0$. Полученные уравнения совместно с уравнением (3') эквивалентны исходной системе (3), (3'). Перейдем к новой переменной $\xi = z - \frac{|z|}{z} \frac{L}{2}$ и новым коэффициентам

$$x_n = (-1)^n i \frac{h_n p_n}{\rho_0} \alpha_n^m. \quad (6)$$

В результате получим систему уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i h_n \xi} = 0, \quad \frac{L-d}{2} < |\xi| \leq \frac{L}{2}; \quad (7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \left(1 - \frac{s^2}{h_n^2}\right) e^{ih_n \xi} = i\pi \frac{x^2}{a} \operatorname{ctg}^2 \theta e^{i\lambda \xi} +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n \left(1 - \frac{s^2}{h_n^2}\right) e^{ih_n \xi}, \quad |\xi| < \frac{L-d}{2}; \quad (7')$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n+\nu} = 0. \quad (7'')$$

Преобразуем уравнение (7'). Введем функцию

$$y(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \frac{x_n}{h_n^2} e^{ih_n \xi}.$$

Из уравнения (7') следует, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y''(\xi) + s^2 y(\xi) = -i\pi \frac{x^2}{a} \operatorname{ctg}^2 \theta e^{i\lambda \xi} -$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n \left(1 - \frac{s^2}{h_n^2}\right) e^{ih_n \xi}, \quad |\xi| < \frac{L-d}{2},$$

из которого находим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} e^{ih_n \xi} = -y''(\xi) = A^+ e^{is\xi} + A^- e^{-is\xi} -$$

$$- \frac{i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \lambda^2}{a(s^2 - \lambda^2)} e^{i\lambda \xi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n e^{ih_n \xi}, \quad |\xi| < \frac{L-d}{2}.$$

Здесь A^{\pm} — постоянные интегрирования, которые можно вычислить по значениям функции $y(\xi)$ и ее первой производной в точке $\xi = 0$.

$$A^+(s) = -\frac{s}{2a} \frac{i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\lambda - s} + \frac{s}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} x_n \frac{1 - \varepsilon_n}{h_n^2} (h_n + s), \quad (8)$$

$$A^-(s) = A^+(-s).$$

Итак, функциональная система (7)–(7'') эквивалентна системе

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{ih_n \xi} = 0, \quad \frac{L-d}{2} < |\xi| \leq \frac{L}{2};$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) e^{ih_n \xi} = -\frac{i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \lambda^2}{a(s^2 - \lambda^2)} e^{i\lambda \xi} +$$

$$+ A^+ e^{is\xi} + A^- e^{-is\xi}, \quad |\xi| < \frac{L-d}{2}; \quad (9)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n + \nu} = 0.$$

Решение системы (9) будем искать в виде

$$x_n = -\frac{i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \lambda^2}{a(s^2 - \lambda^2)} x_n^0 + A^+ x_n^+ + A^- x_n^-, \quad (10)$$

где x_n^0 , x_n^{\pm} удовлетворяют этой же функциональной системе (9) с заменой правой части второго уравнения на функции $e^{i\lambda \xi}$ и $e^{\pm is\xi}$ соответственно.

Подставляя x_n в виде (10) в выражения для A^{\pm} (8), получим систему алгебраических уравнений для нахождения постоянных A^{\pm} , из которой

$$A^{\pm} = \frac{\Delta_{\pm}}{\Delta_0}. \quad (11)$$

Здесь

$$\Delta_0 = 1 - \frac{s}{2} [\sigma^+(s) - \sigma^-(-s)] + \frac{s^2}{4} [\sigma^+(-s)\sigma^-(s) - \sigma^+(s)\sigma^-(-s)],$$

$$\Delta_{\pm}(s) = \mp \frac{s}{2a} \frac{i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\lambda \mp s} \pm \frac{s}{2a} \frac{i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \lambda^2}{\lambda^2 - s^2} \sigma_0(\pm s) +$$

$$+ \frac{s^2}{4a} i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \left[\frac{\sigma^{\mp}(\pm s)}{\lambda \pm s} - \frac{\sigma^{\mp}(\mp s)}{\lambda \mp s} \right] +$$

$$+ \frac{s^2}{4a} \frac{i\pi x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \lambda^2}{\lambda^2 - s^2} [\sigma_0(\pm s)\sigma^{\mp}(\mp s) - \sigma_0(\mp s)\sigma^{\mp}(\pm s)],$$

причем

$$\sigma_0(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} x_n^0 \frac{1 - \varepsilon_n}{h_n^2} (h_n + s);$$

$$\sigma^{\pm}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} x_n^{\pm} \frac{1 - \varepsilon_n}{h_n^2} (h_n + s).$$

Найдя решения систем для x_n^0 и x_n^{\pm} , по формулам (11) определяем константы A^{\pm} , затем из соотношений (10) получаем решение системы (9).

Найдем сначала решение функциональной системы для x_n^+ . Перейдем к новой координате $\psi = \frac{2\pi}{L} \xi$ и введем обозначения $\mu = \frac{sL}{2\pi}$, $\chi = \mu - \nu$. Система примет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^+ e^{in\psi} = 0, \quad \pi \frac{L-d}{L} < |\psi| \leq \pi; \quad (12)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^+ \frac{|n|}{n} e^{in\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\psi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^+ \frac{|n|}{n} \varepsilon_n e^{in\psi}, \quad (12')$$

$$|\psi| < \pi \frac{L-d}{L};$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n^+}{n+\nu} = 0. \quad (12'')$$

Здесь a_n — коэффициенты ряда Фурье на $(-\pi, \pi]$ функции $e^{i\chi\psi}$;

$$a_n = (-1)^n \frac{\sin \pi \chi}{\pi (\chi - n)}.$$

Согласно результатам работы [4], уравнения (12) и (12') эквивалентны следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_m^+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n V_{m-1}^{n-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^+ \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{m-1}^{n-1} + x_0^+ P_m, \quad m \neq 0, \quad (13)$$

в которой введены обозначения

$$V_{m-1}^{k-1} = V_{m-1}^{k-1}(u) = \frac{m}{2(m-k)} [P_{m-1}(u) P_k(u) - P_m(u) P_{k-1}(u)];$$

$P_k = P_k(u)$ — функции Лежандра 1-го рода; $u = \cos \pi \frac{L-d}{L}$.

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n V_{m-1}^{n-1} = V_{m-1}^{\chi-1}.$$

Подставим в соотношение (12'') вместо x_m^+ их выражения через правые части равенств (13) и произведем суммирование. В результате придем к следующей системе:

$$x_m^+ = V_{m-1}^{\chi-1} + x_0^+ P_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^+ \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}, \quad m \neq 0; \quad (14)$$

$$2x_0^+ P_{\nu-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^+ \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_n^{\nu} + W_{\chi}^{\nu} = 0. \quad (14')$$

Здесь

$$W_k^v = W_k^v(u) = \frac{v}{k+v} [P_k(u) P_v(u) - P_{k-1}(u) P_{v-1}(u)].$$

Обозначим

$$q = \max_m \frac{1}{\left| 1 - \varepsilon_m \frac{|m|}{m} V_{m-1}^{m-1} \right|} \sum_{n \neq 0, m} |\varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}|.$$

Используя оценки (5) и оценки для функций Лежандра, можно показать, что

$$q < C_1(x) \Delta^2 \sqrt{1-u^2} [1 + \ln(1+|v|)].$$

При густом расположении колец ($\Delta \ll 1$) либо при узких кольцах ($1-u \ll 1$) или же при узких щелях между кольцами ($1+u \ll 1$) величина $q \ll 1$. В этом случае решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (14), (14') может быть получено методом последовательных приближений. Решаем совместно уравнения (14), считая x_0^+ известным, затем найденные x_m^+ ($m \neq 0$) подставляем в уравнение (14') и находим x_0^+ . Ограничиваясь первым приближением, получим

$$x_n^+ = \frac{1}{1 - \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{n-1}^{n-1}} \{ V_{n-1}^{\mu-v-1} + \eta_n^{\mu-v} + x_0^+ [P_n + \eta_n + \varepsilon_0 (V_{n-1}^{-1} + \eta_n^0)] \}, \quad n \neq 0,$$

$$x_0^+ = \frac{1}{D} \left(-W_{\mu-v}^v - \sum_{m \neq 0} \frac{|m|}{m} \varepsilon_m W_m^v \frac{V_{m-1}^{\mu-v-1} + \eta_m^{\mu-v}}{1 - \frac{|m|}{m} \varepsilon_m V_{m-1}^{m-1}} \right),$$

где

$$D = P_{v-1} + P_v + (1 - \varepsilon_0) (P_{v-1} - P_v) + \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} W_n^v \times \\ \times \frac{P_n + \eta_n + \varepsilon_0 (V_{n-1}^{-1} + \eta_n^0)}{1 - \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{n-1}^{n-1}},$$

причем

$$|\eta_m| < \sum_{n \neq 0, m} P_n \frac{|n|}{n} \frac{\varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}}{1 - \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{n-1}^{n-1}} < C_2 q,$$

$$|\eta_m^x| < \sum_{n \neq 0, m} V_{n-1}^{x-1} \frac{|n|}{n} \frac{\varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}}{1 - \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{n-1}^{n-1}} < C_3 \sqrt{1-uv} q.$$

Зная x_n^+ , легко получим x_n^- и x_n^0 , заменяя s на $-s$ и λ соответственно. По формуле (10) находим x_n , затем, используя формулы (1), (2), (3'), (6), получаем $\Pi_1^{e,m}(\rho, z)$. При $\Delta \ll 1$ и $\frac{d}{L} \ll 1$ по этим формулам находим с точностью до величины порядка $\Delta^2 \frac{d^2}{L^2} \left| \ln \frac{d}{L} \right|$

$$\Pi_1^m(\rho, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta H_1^{(1)}(\rho_0 a) G_m(\rho_0; \rho, a) e^{i\lambda|z|}}{\delta - i [\rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a)]} d\lambda, \quad (15)$$

$$\delta = - \left(\pi \Delta \ln \frac{1+u}{2} \right)^{-1}.$$

Аналогичное выражение получаем и для $\Pi_1^e(\rho, z)$.

При решении задачи с электрическим диполем приходится решать систему функциональных уравнений, такую же, как (3) — (3'), но с другим свободным членом. Получаем выражения для электрического и магнитного векторов Герца, подобные (15).

Так же, как в работах [5, 6] для поля диполя в кольцевом и спиральном волноводах, электромагнитное поле в кольцевом спирально проводящем волноводе (15) можно представить еще в виде суперпозиции так называемых «квазисобственных» волн со значениями постоянных распространения, которые совпадают с корнями уравнения

$$\delta - i [\rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a)] = 0, \quad (16)$$

лежащими в верхней полуплоскости комплексной плоскости λ , и непрерывного набора волн, постоянные распространения которых лежат на разрезе в плоскости λ , исходящем из $\lambda = k$ вертикально вверх [5].

В работе [5] показано также, что в определенных областях электромагнитное поле в волноводе с достаточной точностью описывается только набором «квазисобственных» волн. При этом

$$\Pi_1^m(\rho, z) \approx \begin{cases} \sum_{\nu} A_{\nu}^{-} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}) e^{i\lambda_{\nu}|z|}, & \rho < a; \\ \sum_{\nu} A_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}) e^{i\lambda_{\nu}|z|}, & \rho > a. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu}$ — корни уравнения (16), лежащие в верхней полуплоскости; $\frac{1}{\pi i} A_{\nu}^{-} I_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2})$ и $\frac{1}{\pi i} A_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2})$ — вычеты в этих корнях подынтегральных функций выражения (15) соответственно при $\rho < a$ и при $\rho > a$, причем

$$A_{\nu}^{-} J_1(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}) = A_{\nu}^{+} H_1^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^2}).$$

Отметим, что выделение «квазисобственных» волн можно произвести не только в том частном случае, при котором выписано выражение (15), но и в общем решении задачи.

Выясним особенности «квазисобственных» волн в кольцевом спирально проводящем волноводе при малых Δ и $\frac{d}{L}$. Прежде

всего заметим, что их дисперсионное уравнение (16) при $\theta = \frac{\pi}{2}$ есть характеристическое уравнение симметричных электрических волн в кольцевом волноводе. Однако при $\theta = 0$ по ранее указанной причине уравнение (16) не совпадает с дисперсионным уравнением симметричных магнитных волн кольцевого волновода.

Рассмотрим сначала решения уравнения (16), которые в сплошном волноводе соответствуют быстрым волнам. При малых углах спиральной проводимости θ либо при малых δ и углах θ , близких к $\frac{\pi}{2}$, решение уравнения (16) можно найти методом возмущений. Обозначая $y = \rho_0 a$, уравнение (16) перепишем в виде

$$J_1(y) = -\text{tg}^2 \theta \frac{y^2}{\kappa^2} \frac{J_0(y) H_0^{(1)}(y)}{H_1^{(1)}(y)} - \frac{i \text{tg}^2 \theta \delta}{\kappa^2 H_1^{(1)}(y)}. \quad (16a)$$

За нулевое приближение при малых θ возьмем корень характеристического уравнения для постоянных распространения симметричных магнитных волн в сплошном круглом волноводе

$$J_1(y_0) = 0, \quad y_0 \approx 3,832$$

и будем считать, что $\kappa > y_0$. Подставляя предполагаемое решение в виде ряда по $\text{tg}^2 \theta$ в уравнение (16a), найдем его решение. Затем определим фазовую скорость v_ϕ и затухание $\text{Im} \lambda a$ волны в кольцевом спирально проводящем волноводе при малом угле θ

$$\lambda a = \sqrt{\kappa^2 - y^2}; \quad v_\phi = \frac{\omega a}{\text{Re} \lambda a};$$

$$v_\phi = v_{\phi 0} \left\{ 1 + \text{tg}^2 \theta \frac{v_{\phi 0}^2 \pi y_0^2}{c^2 2\kappa^4} \left[\delta - \frac{2y_0}{\pi} \frac{N_0(y_0)}{N_1(y_0)} \right] + \dots \right\};$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \lambda a = & \text{tg}^2 \theta \frac{v_{\phi 0} \pi y_0^4}{c 2\kappa^3} J_0^2(y_0) + \text{tg}^4 \theta \frac{v_{\phi 0} \pi y_0^4}{c 2\kappa} J_0^2(y_0) \left\{ \frac{y_0^2}{\kappa^4} \left[1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{N_0^2(y_0)}{N_1^2(y_0)} \right] - \frac{N_0(y_0)}{N_1(y_0)} \left[\frac{4}{\pi^2} + 6 \frac{y_0}{\kappa^4} + \frac{v_{\phi 0}^2 y_0}{c^2 2\pi^2 \kappa^4} \right] + \delta \frac{\pi}{4\kappa^4} \left[9 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 8y_0 \frac{N_0(y_0)}{N_1(y_0)} + \frac{2}{\pi} \frac{v_{\phi 0}^2}{c^2} \right] + \delta^2 \frac{\pi^2}{4\kappa^4} \right\} + \dots \end{aligned}$$

Здесь $v_{\phi 0}$ — фазовая скорость волны H_{01} сплошного круглого волновода.

Анализируя полученные выражения, можно сделать следующие выводы.

Скорость волны в кольцевом спирально проводящем волноводе при малом угле θ возрастает с увеличением δ и может быть как больше, так и меньше $v_{\phi 0}$ в зависимости от величины параметра δ . Увеличение параметра δ соответствует росту ширины щели между кольцами или уменьшению периода волновода. При некотором значении

$$\delta = \delta_0 \approx \frac{2y_0}{\pi} \frac{N_0(y_0)}{N_1(y_0)} \approx 0,3034 \quad v_{\phi} = v_{\phi 0}.$$

При $\delta < \delta_0$ скорость волны меньше, чем $v_{\phi 0}$ и снижается с увеличением угла спиральной проводимости θ ; при $\delta > \delta_0$ скорость волны больше $v_{\phi 0}$ и увеличивается с ростом θ .

Затухание этой волны определяется в основном углом спиральной проводимости и увеличивается при его росте или при увеличении параметра δ .

При θ , близком к $\frac{\pi}{2}$, уравнение (16) удобно переписать в виде

$$J_0(y) = -\text{ctg}^2 \theta \frac{x^2 J_1(y) H_1^{(1)}(y)}{y^2 H_0^{(1)}(y)} - \frac{i\delta}{y^2 H_0^{(1)}(y)}. \quad (16b)$$

Решая уравнение (16b) при малых δ и $\text{ctg}^2 \theta$ методом возмущений, за нулевое приближение примем корень дисперсионного уравнения для постоянных распространения симметричных электрических волн в сплошном круглом волноводе

$$J_0(\tilde{y}_0) = 0, \quad \tilde{y}_0 \approx 2,405$$

и будем считать $x > \tilde{y}_0$.

При этом для фазовой скорости \tilde{v}_{ϕ} и затухания $\text{Im} \tilde{\lambda} a$ волны получим выражения

$$\tilde{v}_{\phi} = \tilde{v}_{\phi 0} \left[1 + \text{ctg}^2 \theta \frac{\tilde{v}_{\phi 0}^2}{c^2} \frac{2}{y_0} \frac{N_1(\tilde{y}_0)}{N_0(\tilde{y}_0)} + \delta \frac{\tilde{v}_{\phi 0}^2}{c^2} \frac{\pi}{x^2} + \dots \right];$$

$$\text{Im} \tilde{\lambda} a = \text{ctg}^2 \theta \frac{\tilde{v}_{\phi 0} \pi x}{c} J_1^2(\tilde{y}_0) + \frac{\tilde{v}_{\phi 0}}{c} \frac{\pi^3}{4x} J_1^2(\tilde{y}_0) \left(\frac{\delta^2}{2} - \tilde{\delta}_0 \delta \right) + \dots$$

Здесь $\tilde{v}_{\phi 0}$ — фазовая скорость волны E_{01} сплошного круглого волновода,

$$\tilde{\delta}_0 = \text{ctg}^2 \theta \frac{x^2}{\pi \tilde{y}_0^2} \left[5 - 4 \tilde{y}_0 \frac{N_1(\tilde{y}_0)}{N_0(\tilde{y}_0)} - \frac{x^2}{x^2 - \tilde{y}_0^2} \right],$$

причем $\tilde{\delta}_0 \leq 0$ при $\tilde{y}_0 < x \leq x_0$ ($x_0 \approx 2,9$).

Таким образом, можно сделать следующие заключения о волне в кольцевом спирально проводящем волноводе при малых значениях δ и угле θ , близком к $\frac{\pi}{2}$.

Скорость такой волны больше, чем $\tilde{v}_{\text{фо}}$, и возрастает с увеличением параметра δ или уменьшением угла θ . Затухание этой волны определяется в основном углом спиральной проводимости и увеличивается при его уменьшении.

Если угол $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ и частота $x > x_0$, при увеличении параметра δ затухание волны вначале уменьшается, при значении $\delta = \tilde{\delta}_0$ имеет min , затем увеличивается.

При частотах $\tilde{y}_0 < x \leq x_0$ указанное явление отсутствует и затухание волны увеличивается с ростом параметра δ .

Результаты, полученные здесь, согласуются с выводами Смирнова [7] о быстрых волнах кольцевого и спирального волноводов.

Кроме быстрых волн, затухающих при удалении от источника колебаний, в рассматриваемом волноводе могут существовать и медленные волны.

Для анализа медленных волн в уравнении (16) удобно перейти к модифицированным функциям Бесселя

$$x^2 \text{ctg}^2 \theta - \frac{\pi \delta}{2 I_1(x) K_1(x)} = x^2 \frac{I_0(x) K_0(x)}{I_1(x) K_1(x)}. \quad (16c)$$

Здесь $x = \sqrt{(\lambda a)^2 - x^2}$ и выбрана та ветвь корня, для которой $\text{Re} \sqrt{(\lambda a)^2 - x^2} > 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль вещественной оси.

Левая часть уравнения (16c) — монотонно убывающая функция с ростом x от нуля до ∞ и имеет максимальное значение в нуле

$$\left(\frac{d}{dx} [I_1(x) K_1(x)] = \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^\infty t \frac{[I_1(t)]^2}{t^2 + x^2} dt \right\} < 0 \right).$$

Следовательно, вещественное решение уравнения (16c) существует, если $x^2 \text{ctg}^2 \theta - \pi \delta \geq 0$, или иначе

$$\frac{d}{L} \leq \frac{2}{\pi} \arcsin e^{-\frac{\pi}{x^2} \frac{a}{L} \text{tg}^2 \theta}. \quad (17)$$

Это неравенство является необходимым и достаточным условием для существования в данном приближении медленной незатухающей волны.

При достижении равенства в условии (17) скорость медленной волны в системе становится равной c .

При малых δ решение уравнения (16c) легко получить методом возмущений по δ .

При этом найдем, что при малых δ волна в кольцевом спирально проводящем волноводе, соответствующая медленной незатухающей волне спирально проводящего волновода, также является незатухающей вдоль оси волновода. При увеличении δ фазовая скорость этой волны растет.

При малом угле θ уравнение (16с) заменим приближенным уравнением $x^2 + \pi\delta x - x^2 \text{ctg}^2 \theta = 0$.

Решая это уравнение, находим

$$(\lambda a)^2 = \frac{x^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \pi^2 \delta^2 - \frac{1}{2} \pi \delta \sqrt{\pi^2 \delta^2 + 4x^2 \text{ctg}^2 \theta}.$$

Два корня отличаются только знаками и соответствуют двум одинаковым волнам, бегущим в противоположных направлениях. Если при малых θ обозначим фазовую скорость медленной волны в нашей системе u_ϕ , а в обычном спирально проводящем волноводе $u_{\phi 0}$, то

$$u_\phi - u_{\phi 0} = c \sin \theta \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi \delta}{2x^2} \sin^2 \theta [\pi \delta - \sqrt{\pi^2 \delta^2 + 4x^2 \text{ctg}^2 \theta}]}} - 1 \right\}.$$

Результаты анализа медленных волн в кольцевом спирально проводящем волноводе согласуются с экспериментальными характеристиками, полученными в работе [2] для ЛБВ с секционированными спиральными замедляющими системами.

В заключение приношу глубокую благодарность В. Г. Сологубу и В. П. Шестопалову за руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. J. Dodds and R. W. Peter. Filter-helix traveling-wave tube, RCA Review, v. 14, 1953, p. 502.
2. В. С. Михалевский, Д. Н. Венеровский. ЛБВ с секционированными спиральными замедляющими системами. ЖТФ, 26, 1956.
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 2, 1966.
4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках ЖТФ, 32, 1962.
5. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб. Возбуждение кольцевого волновода диполем. Сб. «Радиотехника», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.
6. В. Г. Сологуб. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1967.
7. Н. Н. Смирнов. Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями. ЖТФ, 28, 1958.