ДИФРАКЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН НА КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. Г. Сологуб, Т. И. Харчевникова

Харьков

Рассматривается задача о дифракции акустической сферической волны на идеально жесткой поверхности Σ бесконечного кругового конуса с периодически прорезанными вдоль образующих щелями (рисунок).

Как известно, эта задача состоит в нахождении в области D, дополняющей Σ до всего пространства, функции $G(P, Q; k)$ (источник колебаний находится в точке Q, P — точка наблюдения), представимой в виде

$$G(P, Q; k) = \frac{e^{-ikR_{PQ}}}{R_{PQ}} + \gamma(P, Q; k), \tag{1}$$

где R_{PQ} — расстояние между точками P и Q; k — волновое число (временная зависимость взята в виде $e^{i\omega t}$), а функция $\gamma(P, Q; k)$ в области D удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца ($Imk \leqslant 0$), условию на бесконечности в форме принципа предельного поглощения, условию конечности энергии в любой ограниченной области. Данная функция такова, что во всех внутренних точках границы области D имеет место краевое условие

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0, \tag{2}$$

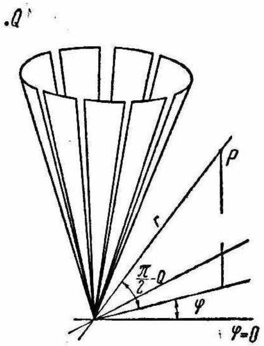
где n — определенным образом ориентированная нормаль к поверхности Σ.

Решение поставленной таким образом задачи будет единственным.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом координат в вершине конуса. Обозначим через γ угол раствора конической поверхности, N — число щелей, d — «ширина» щелей, $l = \frac{2\pi}{N}$ — период рассматриваемой структуры (d и l — величины соответствующих двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось конуса и ребра соседних лент); r_0, θ_0, φ_0 — сферические координаты источника колебаний.

Решение задачи будем искать с помощью интегрального преобразования Лебедева — Конторовича [1] относительно радиальной координаты

$$\gamma(P, Q; k) = \int_0^\infty \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(\tau, k)\, U_{m\tau}(\theta, \varphi, k) \right\} d\tau. \qquad (3)$$



Здесь $a_m(\tau, k)$ — некоторые известные коэффициенты. Для функций $U_{m\tau}(\theta, \varphi, k)$ имеет место следующее представление:

$$U_{m\tau}(\theta, \varphi, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn}(\tau)\, e^{i(m+nN)\varphi} \times$$

$$\times \begin{cases} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta), \quad 0 < \theta < \gamma, \\ \dfrac{\left.\dfrac{d}{d\theta} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta)\right|_{\theta=\gamma}}{\left.\dfrac{d}{d\theta} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta)\right|_{\theta=\gamma}}\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta), \\ \gamma < \theta < \pi, \end{cases} \qquad (4)$$

которое нетрудно получить, исходя из уравнения Гельмгольца и краевого условия для функции $U_{m\tau}(\theta, \varphi, k)$, вытекающего из условия (2), а также периодичности области D (в выражениях (3), (4) и далее $H_{i\tau}^{(2)}(kr)$ — функции Ханкеля 2-го рода, $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода, $\Gamma(z)$-гамма-функция).

Обозначим далее

$$x_{m_0+n}^{(m)} = \alpha_{mn} \frac{d}{d\theta} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{m+nN}(\cos\gamma), \qquad (5)$$

где m_0 — ближайшее к $\frac{m}{N}$ целое число, величина $\nu = \frac{m}{N} - m_0$ расположена в интервале $-\frac{1}{2} \leqslant \nu < \frac{1}{2}$.

Неизвестные коэффициенты $x_n^{(m)}$ подбираются так, чтобы удовлетворялось краевое условие на лентах конуса и условие непрерывности поля в щелях между лентами. Последние условия приводят к следующей системе функциональных соотношений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(m)} e^{in\psi} = e^{im_0\psi}, \quad \frac{\pi d}{l} < |\psi| < \pi; \qquad (6)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(m)} \frac{(-1)^{m+(n-m_0)N} \operatorname{ch} \pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau+m+(n-m_0)N\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau-m-(n-m_0)N\right)} \times$$

$$\times \frac{e^{in\psi}}{\frac{d}{d\theta} P^{m+(n-m_0)N}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma) \frac{d}{d\theta} P^{m+(n-m_0)N}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma)} = 0, \ |\psi| < \frac{\pi d}{l}. \qquad (7)$$

Эти соотношения в дальнейшем будем рассматривать как уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов $x_n^{(m)}$, которые будем искать в классе коэффициентов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|x_n^{(m)}|^2}{1+|n|} < \infty. \qquad (8)$$

Это условие получается в результате формального применения к подынтегральной функции в представлении (3) условия конечности энергии.

С помощью метода, который разработан в [2] и [3] для решения задач дифракции в областях с периодической границей, обладающей плоской или цилиндрической симметрией, полученные функциональные соотношения (6), (7) могут быть сведены к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений 2-го рода относительно искомых коэффициентов $x_n^{(m)}$ следующего вида:

$$\frac{2P_{\nu-1}(-u)}{P_\nu(-u)+P_{\nu-1}(-u)}\left(x_0^{(m)}-\delta_0^{m_0}\right) = -\nu \frac{|m_0|}{m_0}(1-\varepsilon_{m_0}) V^{m_0}(u) +$$

$$+\nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x_n^{(m)}-\delta_n^{m_0}\right) \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V^n(u); \qquad (9)$$

$$x_s^{(m)} - \delta_s^{m_0} = -\frac{|m_0|}{m_0}(1-\varepsilon_{m_0}) V_{s-1}^{m_0-1}(u) + \sum_{n\neq 0} \left(x_n^{(m)}-\delta_n^{m_0}\right)\frac{|n|}{n} \times$$

$$\times \varepsilon_n V_{s-1}^{n-1}(u) + \left(x_0^{(m_0)}-\delta_0^{m_0}\right)\left[P_s(u)+\varepsilon_0 V_{s-1}^{-1}(u)\right], \ s=\pm 1, \ \pm 2, \ldots, \qquad (10)$$

где $u=\cos\frac{\pi d}{l}$; $\delta_n^{m_0}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_n^{m_0}=0$ при $n\neq m_0$ и $\delta_n^{m_0}=1$ при $n=m_0$; $P_\nu(-u)$ — функции Лежандра;

$$V^n(u) = \frac{1}{n+\nu}\left\{P_n(u) - \frac{P_{\nu-1}(-u)}{P_\nu(-u)+P_{\nu-1}(-u)}\left[P_n(u)-P_{n-1}(u)\right]\right\}; \qquad (11)$$

$$V_s^n(u) = \frac{s+1}{2(s-n)}\left[P_s(u)\,P_{n+1}(u) - P_{s+1}(u)\,P_n(u)\right], \tag{12}$$

а для величин ε_n, определяемых посредством соотношений

$$\frac{(-1)^{m+(n-m_0)N}\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi\sin^2\gamma}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau+m+(n-m_0)N\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau-m+(n-m_0)N\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{\frac{d}{d\theta}P^{m+(n-m_0)N}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)\,\frac{d}{d\theta}P^{m+(n-m_0)N}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma)} = \frac{1}{N(n+\nu)}\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_n), \tag{13}$$

имеет место оценка

$$|\varepsilon_n| < \frac{\mathrm{const}}{N^2(n+\nu)^2}. \tag{14}$$

Легко показать, что матричный оператор бесконечной системы (9), (10) вполне непрерывен в гильбертовом пространстве $\tilde{l}_2$ последовательностей $\{x_n^{(m)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ со скалярным произведением

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x_n y_n}{1+|n|}. \tag{15}$$

Если учесть единственность решения нашей задачи, отсюда вытекает существование единственного решения бесконечной системы (9), (10) из $\tilde{l}_2$, которое при любых соотношениях между шириной ленты и периодом и любых конечных значениях параметров N, m, τ можно получить методом «усечения», полагая, например, $\varepsilon_n = 0$ для n, по модулю больших некоторого M.

Отметим также, что коэффициенты α_{mn}, определяемые через решение бесконечной системы (9), (10) по формуле (5), не зависят от волнового числа. Этот факт при условии нахождения решения бесконечной системы (9), (10) (или его асимптотики при $\tau\to\infty$) делает возможным построение коротковолновой асимптотики решения нашей задачи.

В частном случае, когда число щелей достаточно велико или когда они узки по сравнению с периодом, решение бесконечной системы может быть получено методом последовательных приближений. В указанных случаях найдено приближенное выражение для подынтегральной функции в представлении (3) с оценкой погрешности. Ограничиваясь первым приближением, получим

$$x_s^{(m)} - \delta_s^{m_0} = \left(x_0^{(m)} - \delta_0^{m_0}\right)\left[P_s(u) + \varepsilon_0 V_{s-1}^{-1}(u) + \theta_s(u)\right] -$$

$$-\frac{|m_0|}{m_0}(1-\varepsilon_{m_0})\left[V_{s-1}^{m_0-1}(u) + \theta_s^{m_0}(u)\right],\ s\neq 0; \tag{16}$$

$$x_0^{(m)}-\delta_0^{m_0}=\frac{-\nu\frac{|m_0|}{m_0}\left(1-\varepsilon_{m_0}\right)V^{m_0}(u)-\nu\frac{|m_0|}{m_0}\left(1-\varepsilon_{m_0}\right)\times}{\frac{P_{-\nu}(-u)-P_\nu(-u)}{P_{-\nu}(-u)+P_\nu(-u)}+1-\varepsilon_0-\nu\times}$$

$$\frac{\times\sum\limits_{n\neq 0}\frac{|n|}{n}\varepsilon_n V^n(u)\left[V_{n-1}^{m_0-1}(u)+\theta_n^{m_0}(u)\right]}{\times\sum\limits_{n\neq 0}\frac{|n|}{n}\varepsilon_n V^n(u)\left[P_n(u)+\varepsilon_0 V_{n-1}^{-1}(u)+\theta_n(u)\right]},\tag{17}$$

где для величин $\theta_s(u)$ и $\theta_s^{m_0}(u)$ имеют место оценки

$$|\theta_s(u)|<\frac{q}{1-q}\left(1+|\varepsilon_0|\sqrt{1-u}\right);$$

$$\left|\theta_s^{m_0}(u)\right|<\frac{q}{1-q}\left[\frac{1-u}{2}+\frac{\sqrt{1-u^2}}{2}\ln\left(1+|m_0|\right)\right],\quad m_0\neq 0;\tag{18}$$

$$\left|\theta_s^0(u)\right|<\frac{q}{1-q}\sqrt{1-u};$$

$$q<\mathrm{const}\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{N^2}.$$

В предельном случае «полупрозрачного» конуса, когда существует

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \frac{d}{l}\to 0}}\left(-\frac{1}{N}\ln\sin\frac{\pi d}{2l}\right)=Q,\tag{19}$$

из полученных выражений (16), (17) находим явное выражение для решения нашей задачи. Это решение может быть представлено в виде

$$G^{\text{пр}}(P,Q;k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}e^{im(\varphi-\varphi_0)}}{8}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\mu H_\mu^{(2)}(kr_0)\,I_\mu(kr)}{\cos\pi\mu}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+m\right)}\Bigg\{F(\theta,\theta_0,m,\mu)-$$

$$-\frac{P_{\mu-\frac{1}{2}}^{m}(\cos\theta)\,P_{\mu-\frac{1}{2}}^{m}(\cos\theta_0)\left[\frac{d}{d\theta}P_{\mu-\frac{1}{2}}^{m}(-\cos\gamma)\right]^2}{\varphi(\mu)}\Bigg\}\,d\mu.\quad(0<\theta<\gamma)\tag{20}$$

(аналогичное представление для решения имеет место и при $\gamma<\theta<\pi$).

Здесь

$$F(\theta, \theta_0, m, \mu) = \begin{cases} P^m_{\mu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\, P^m_{\mu-\frac{1}{2}}(-\cos\theta_0), & 0 < \theta < \theta_0; \\ P^m_{\mu-\frac{1}{2}}(-\cos\theta)\, P^m_{\mu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_0), & \theta_0 < \theta < \pi; \end{cases} \tag{21}$$

$$\varphi(\mu) = \frac{d}{d\theta} P^m_{\mu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma) \frac{d}{d\theta} P^m_{\mu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma) +$$

$$+ \frac{(-1)^m \cos\pi\mu}{2Q\pi\sin^2\gamma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-m\right)}. \tag{22}$$

Из этих выражений вытекают следующие краевые условия на поверхности конуса $\theta = \gamma$, которым удовлетворяет решение предельной задачи $G^{\text{пр}}(P, Q; k)$:

$$\left(\frac{\partial G^{\text{пр}}}{\partial\theta}\right)^+ = \left(\frac{\partial G^{\text{пр}}}{\partial\theta}\right)^-; \tag{23}$$

$$(G^{\text{пр}})^+ - (G^{\text{пр}})^- = -4Q\sin\gamma \left.\frac{\partial G^{\text{пр}}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\gamma}. \tag{24}$$

Здесь f^+ и f^- означают предельные значения функции f при $\theta = \gamma \pm 0$ соответственно. Заметим, что условиями (23), (24) вместе с уравнением Гельмгольца и условием на бесконечности функция $G^{\text{пр}}(P, Q; k)$ определяется однозначно.

Выражение (20) может быть переписано также и в другом виде. Интеграл по отрезку $(-iR, iR)$ мнимой оси заменим на сумму интеграла по дуге полуокружности радиуса R, лежащей в правой полуплоскости, и вычетов относительно полюсов подынтегральной функции, попадающих в соответствующую область. При $R \to \infty$ интеграл по полуокружности стремится к нулю, и мы получаем представление для решения предельной задачи, не содержащее интегральных членов $(0 < \theta < \gamma)$:

$$G^{\text{пр}}(P, Q; k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} e^{im(\varphi-\varphi_0)}\pi i}{8\sqrt{rr_0}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j H^{(2)}_{z_j}(kr_0) J_{z_j}(kr)}{\cos\pi z_j} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+z_j-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+z_j+m\right)} \cdot \frac{P^m_{z_j-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\, P^m_{z_j-\frac{1}{2}}(\cos\theta_0) \left[\frac{d}{d\theta} P^m_{z_j-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma)\right]^2}{\left.\frac{d\varphi}{dz}\right|_{z=z_j}}, \quad r<r_0. \tag{25}$$

Решение для $r > r_0$ получается в результате перемены мест r и r_0 в выражении (25). Здесь $z_j = \mu_j + \delta_j$, μ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — корни функции $\frac{d}{d\theta} P^m_{\mu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)$, лежащие в правой полуплоскости комплексного переменного μ; функция $\varphi(z)$ определена формулой (22), а

$$\delta_j = \frac{(-1)^{m+1}}{2Q\pi\sin^2\gamma} \cdot \frac{\cos\pi j\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu_j-m\right)\frac{d}{d\theta}P^m_{\mu_j-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma)\frac{d^2}{dzd\theta}P^m_{z-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\Big|_{z=z_j}} \times$$

$$\times\left[1+Q\left(\frac{1}{Q}\right)\right]. \qquad (26)$$

В заключение отметим, что важным частным случаем рассмотренной выше задачи является задача о дифракции на плоском экране в виде угла произвольного раствора (в частности, задача о дифракции на полуплоскости).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев, М. И. Конторович. ЖТФ, т. 8, вып. 10—11, 1938.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, т. 32, вып. 4, 1962.
3. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб. Возбуждение кольцевого волновода диполем. Сб. «Радиотехника», вып. 1, Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.