

ЧАСТИЦЕПОДОБНОЕ САМОСОГЛАСОВАННОЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗЛУЧАЮЩЕГО ЗАРЯДА

В. И. Гайдук, Е. И. Нефедов

Москва

В данной статье выясняются условия, при которых сгусток заряженной материи локализуется в лабораторной системе координат благодаря действию собственного электромагнитного поля. При этом предполагается, что среда и связанное с ней поле удовлетворяют релятивистским уравнениям движения и уравнениям Максвелла.

Анализ нерелятивистских уравнений, проведенный А. А. Власовым, показал, что в поле гравитационных или электромагнитных сил трехмерное локализованное образование материи существовать не может [8]. Иная ситуация возможна при использовании релятивистских, классических (по форме) уравнений с постулятивным предположением о допустимости решения стационарной нелинейной задачи о распределении поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в сгустке

в виде комплексной функции $\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}$. Такой способ отыскания периодических по времени в сущности эквивалентен квантовой формулировке поставленной задачи. После введения

подстановки $\vec{E} e^{j\omega t}$ в исходные уравнения временной множитель $e^{j\omega t}$ из них выпадает и задача сводится к вычислению комплекс-

ной амплитуды \vec{E} из уравнения*, полученного в работе [3]:

$$\vec{u} \operatorname{grad} \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \eta \left(\vec{E} - \frac{1}{j\omega} \vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{E} \right); \quad (1)$$

$$\vec{u} = - \frac{c^2 \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}}{j\omega \operatorname{div} \vec{E}}, \quad \eta, \quad \omega = \operatorname{const}.$$

* В исходной работе [3] уравнения Максвелла используются в точной записи, однако смысл фигурирующих в них величин (ρ , \vec{I} , \vec{u}) не является общепринятым. Например, в данном сферически-симметричном случае скорость \vec{u} пропорциональна плотности тока смещения, деленной на плотность заряда. Поэтому исходная система уравнений является математическим выражением некоторой физической гипотезы, что уже оговаривалось в работе [3], некоторые следствия которой исследуются в настоящей статье.

В данной работе находится сферически-симметричное решение уравнения (1) в предположении, что имеется радиальная компонента $\hat{E}_r(r) = \hat{E}(r)$; при этом магнитное поле $\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \text{rot } \vec{E} = 0$, конвекционный ток $\vec{I} = \rho\vec{u} = -j\omega\mu_0\vec{E}$ есть исключительно ток смещения. В данном случае поле определяется потенциалом [3]:

$$\vec{E}(r) = -\text{grad } \hat{\varphi}(r), \quad (2)$$

который, в свою очередь, зависит от поля

$$\hat{\varphi}(r) = \frac{1}{\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad u = -j\omega \frac{Er^2}{dr}. \quad (3)$$

В (1) и (3) константы η и ω являются параметрами задачи.

Соотношения (2), (3) дают для $\hat{E}(r)$ то же уравнение, что и (1). Перепишем его для безразмерной радиальной координаты $x = \frac{\omega}{c} r$ и заряда $Q = \frac{\eta\omega}{c^3} \hat{E}r^2$ внутри сферы радиуса r . В результате имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{x^2}}} = \frac{Q}{x^2}, \quad Q' = \frac{dQ}{dx} \quad (4)$$

для $Q(x)$. Полезно заметить, что потенциал $\hat{\varphi}$, плотность заряда $\hat{\rho}$ и поле \hat{E} пропорциональны соответственно

$$\left(1 + \frac{Q^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{Q'}{x^2} \text{ и } \frac{Q}{x^2}.$$

Если радикалу в (3) приписать знак минус, то (4) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} \left| 1 + \frac{Q^2}{x^2} \right|^{-\frac{1}{2}} = -\frac{Q}{x^2}, \quad (4a)$$

что сводится к (4), если же радикал брать с плюсом для переменной, $Q_- = -Q$. Итак, (4) фактически дает два симметричных относительно оси x распределения заряда противоположных знаков. Считаем, что в (4) радикал берется со знаком «+».

Вид решения (4) при $x \rightarrow 0$ можно найти, учитывая, что $|Q| \ll |Q'|$, так как из физических соображений в центре сгустка

поле $E \sim \frac{Q}{x^2} \rightarrow 0$, а плотность заряда $\rho \sim \frac{Q'}{x^2}$ должна быть конечной (что оправдывается результатом). При этом условии (4) сводится к уравнению $QQ'' - \frac{Q'^3}{x^2} - Q'^2 = 0$, которое, являясь обобщенно-однородным [7], имеет решение

$$Q = -\frac{1}{9} x^3,$$

т. е.

$$|Q'| = \frac{1}{3} x^2 \gg |Q|. \quad (5)$$

Уравнение (4) эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= Q\rho, \\ \frac{d\rho}{dx} &= \frac{Q}{x^2} (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} \rho, \end{aligned} \quad \left(\operatorname{sgn} \rho = \begin{array}{l} 1 \text{ при } \rho > 0 \\ -1 \text{ при } \rho < 0 \end{array} \right). \quad (6)$$

В соответствии с соотношениями (4) при малых $x \rightarrow x_0$

$$Q(x_0) = -\frac{1}{9} x_0^3, \quad \rho(x_0) = \frac{3}{x_0}. \quad (7)$$

Система (6) интегрировалась на ЭЦВМ*. На рис. 1 показаны результаты вычислений $Q(x)$ (текущий заряд), $\frac{Q'}{x^2}$ (плотность заряда), $\frac{Q}{x^2}$ (поле), $\left(1 + \frac{Q^2}{Q'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (потенциал) и $\rho(x) = \frac{Q'}{Q}$. Точка $x = x_R$, где Q' и функция $\rho(x)$ обращаются в нуль, является особой: в ней ход решения изменяется скачком. При любом отклонении ρ от нуля правая часть (6), содержащая $\operatorname{sgn} \rho$, автоматически возвращает функцию $\rho(x)$, а вместе с ней ρ и φ , к нулю. Благодаря этому при $x > x_R$ заряд Q остается постоянным. Реали-

* Большая часть численных результатов получена при начальном значении $x_0 = 0,01$. Для малых x , где $\rho(x)$ велико, $0 < x \leq 5$, система (6) подстановкой $z = \frac{1}{\rho}$, в свою очередь, заменялась на эквивалентную

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= \frac{Q}{z}, \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{Q}{zx^2} (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q(x_0) = -\frac{1}{9} x_0^3, \quad z(x_0) = \frac{1}{3} x_0, \quad x_0 \ll 1.$$

зация этого закона изменения полевых величин при $x \gg x_R$ осуществляется путем колебаний (их амплитуда и частота падают с ростом x), определяемых шагом счета h_x (рис. 1, б). Эти «машинные» колебания как бы моделируют те флуктуации, с помощью которых в природе, по-видимому, реализуется любой «гладкий» закон.

Итак, при $r > R$ поле $\hat{E}(r) = \frac{Q(x_R) c^3}{\eta \omega r^2}$, $Q(x) = Q(x_R)$,

$\hat{\varphi}(r) = 0$, $\hat{\rho}(r) = 0$, т. е. заряд оказывается локализованным в сферической области $0 < r < R$, где он как бы удерживается колоколообразным распределением потенциала*. В точке $r = R$ «частица» граничит с создаваемым ею электрическим полем

$\hat{E} = \frac{\text{const}}{r^2}$, причем его закон

изменения такой же, как для поля точечного заряда. Чтобы найти здесь const, приравняем суммарный заряд сгустка заряду $-e$

$$-e = \int \rho dV = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr =$$

$$= \frac{4\pi \epsilon_0 c^3}{\eta \omega} \int_0^R Q'(x) dx = \frac{4\pi \epsilon_0 c^3}{\eta \omega} Q(x_R). \quad (9)$$

Отсюда следует, что поле сгустка $\hat{E} = -\frac{e}{4\pi \epsilon_0 r^2}$, т. е. строго подчиняется закону Кулона. Этот результат дает основание предположить, что с помощью уравнения (4) можно моделировать структуру электрона.

* Не следует переоценивать возможности интерпретировать характер получающегося решения, поскольку рассматриваемый сгусток не состоит из отдельных движущихся частиц. В центре потенциального колокола $\hat{\varphi}(r)$ «скорость» u равна нулю, а на сфере $r = R$, за границами которой вещество отсутствует, она бесконечна, тогда как для классической потенциальной ямы в ее центре скорость частицы должна быть максимальной, а у краев ямы — равной нулю.

Другими словами, в том непривычном «мире», где скорость \vec{u} мнимая, все явления протекают «наоборот», по сравнению с миром действительных \vec{u} .

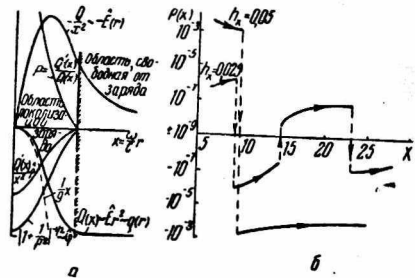


Рис. 1. Зависимость полевых величин от радиальной координаты $x = \frac{\omega}{c} r$ в случае свободного электрона (а) и «машинные» колебания переменной $\rho(x) = Q'(x)/Q(x)$ за границами области локализации заряда для двух значений шага счета $h_x = (б)$.

Итак, ход распределения вещества (заряда) и закон изменения поля вне сгустка напоминают тот образ электрона, который соответствует основанным на опыте (для известных e и m_0) представлениям о размерах электрона и о создаваемом им поле. Однако даваемую теорией структуру электрона, т. е. зависимость разнообразных величин от текущего радиуса r , трудно с чем-либо сопоставить, так как все теории и данные экспериментов обычно формулируют исходя из концепции точечного электрона.

Поэтому рассмотрим добавочный текст, позволяющий проверить гипотезу о том, что сферически-симметричное решение уравнения (1) можно действительно отнести к электрону. Для этого в центр сгустка поместим точечный заряд e_1 и найдем с помощью (3) распределение электронного заряда в сконструированной таким путем модели атома водорода. Необходимо показать, что в этом случае возможно стационарное распределение заряда, средний радиус облака может быть порядка боровского радиуса $r_B = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2}$, т. е. на четыре порядка больше $r_0 = r_B \alpha_{\text{тонк}}^2$ ($\alpha_{\text{тонк}} = \frac{e^2}{\hbar c} = 137,0377^{-1}$ — постоянная тонкой структуры, $e = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$).

Добавляя в правую часть (2) член, учитывающий заданное кулоновское поле* амплитуды $\hat{E} = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r}$ (его также считаем пропорциональным $e^{i\omega t}$, иначе стационарное решение задачи невозможно), получаем вместо (4)

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{Q^2}}} = \mp \frac{Q - \beta}{x^2}, \quad (10)$$

где

$$\beta = \frac{\eta e_1 \omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (11)$$

Знаки «—» и «+» показывают, что сам радикал берется со знаком «+». Это уравнение, как и (4), имеет два симметричных относительно оси x решения (при одновременном изменении знака β), соответствующих переходу от электронной оболочки к позитронной с изменением знака нуклона. При принятом δ -образном распределении заряда и потенциала $\hat{\varphi}_{\text{внеш}} = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r}$

* Описанная дальше процедура нормировки заряда облака приводит к необходимому следствию $e_1 = e$, означающему невозможность существования в атоме нескомпенсированных стабильных зарядов. Математически это обусловлено монотонностью изменения функции $Q(x)$ от $Q(0) \neq 0$ до $Q \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

него поля разумно считать, что при $x \rightarrow 0$ безразмерный заряд Q принимает некоторое конечное значение $Q \neq 0$, соответствующее заряду протона. Потенциал $\varphi \sim \left| 1 + \frac{Q^2}{Q'^2} \right|^{\frac{1}{2}}$, связанный с полем, в этой точке должен быть конечен со всеми своими производными, а при возрастании x заряд $\sim Q$ должен убывать из-за компенсации оболочкой заряда ядра. Этим образованиям при $x \rightarrow 0$ будет удовлетворять подстановка

$$Q = \beta (1 - ax^{n+1}), \quad a = \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

при $a > 0$, причем в правой части (10) должен быть выбран знак «—». Таким образом, для электрона в атоме исходим из уравнения

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{Q'^2}}} = -\frac{Q - \beta}{x^2}. \quad (13)$$

При малых x $Q^2 \gg Q'^2$ и $\left| 1 + \frac{Q^2}{Q'^2} \right|^{-\frac{1}{2}} \simeq -\frac{Q'}{Q}$, так как $Q' < 0$. Значит, из (12) и (13) при $x \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{Q'}{Q} = \int \frac{Q - \beta}{x^2} dx = -\beta a \int x^{n-1} dx = -\frac{1}{n} \beta a x^n + \text{const}.$$

Но $Q'(0) = 0$ только при $\text{const} = 0$. Учитывая это и интегрируя еще раз, получаем

$$Q(x) = A \exp \left[-\beta a \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right], \quad (14)$$

что при $x \rightarrow 0$ сводится к исходной зависимости (12), где нужно положить $A = \beta$ и

$$\beta = \frac{e\omega\eta}{4\pi\epsilon_0 c^3} = n(n+1), \quad (e = e_1 > 0). \quad (15)$$

Таким образом, решения «квантуются», поскольку лишь в этом случае они будут удовлетворять необходимым физическим критериям. Значения $n \geq 1$ в (15) физически соответствуют основному и возбужденному состояниям атома водорода.

Уравнение (13) при $p(x) = \frac{Q'(x)}{Q} < 0$ (что действительно выполняется при любых x) эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \frac{1}{x^2} [Q - n(n+1)] |1 + p^2|^{\frac{3}{2}}; \\ \frac{dQ}{dx} &= Qp. \end{aligned} \quad (16)$$

Начальные условия выбираются в соответствии с (12) и (16) при $x = x_0 \ll 1$

$$Q(x_0) = n(n+1)(1 - ax_0^{n+1}); \quad p(x_0) = -a(n+1)x_0^n [1 - ax_0^{n+1}]^{-1}. \quad (17)$$

Численный расчет системы (16) на ЭЦВМ показывает*, что физический смысл имеют только решения с $a > 0$ (для них $Q|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow$ при любом n ; если $a < 0$, то $Q(\infty) \rightarrow \infty$, рис. 2). Сле-

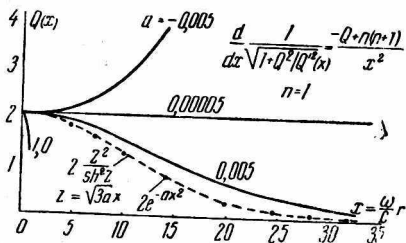


Рис. 2. Вид решения уравнения (13) при различных значениях параметра a (пунктир-приближение, рассмотренное в работе [2], получающееся при условии $Q^2/Q'^2 \gg 1$; точки — выражение (14), асимптотически справедливое при $x \rightarrow 0$).

довательно, при различных значениях тока свободного параметра a область локализации сгустка может изменяться на порядки величин, например, может достичь величины боровского радиуса r_B . Это обстоятельство, по-видимому, доказывает правомерность отнесения сгустка к электрону: те же уравнения в принципе описывают и электрон в атоме.

Дальнейшие оценки показывают, что средний радиус свободного электрона оказывается порядка классического радиуса электрона

$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}$, а средний радиус электрона в атоме — порядка боровского радиуса r_B (при определении константы a в (17) из условия, что энергия распределенного заряда $\hat{\rho}$ в поле точечного заряда e_1 равна боровской энергии

$$W_B = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \alpha_{\text{тонк}}^2).$$

ВЫВОДЫ

1. Сферически-симметричное решение уравнения (1) показывает возможность локализации неизлучающего заряда в собственном электромагнитном поле.

2. Во внешнем центрально-симметричном поле заряд распределен во всем пространстве, эффективный (средний) радиус зависит от константы интегрирования a в (17).

* Приближенный анализ решений (13) сводит задачу к уравнению Лемке [2], рассмотренного еще в 1913 г. задачу удержания частиц газовых шаров при некотором заданном законе изменения температуры в среде.

3. Ряд результатов — появление кулоновского поля в области, свободной от заряда, распадение решения уравнения (13) на n решений при введении внешнего кулоновского поля, порядки величин среднего радиуса и энергии, конечность всех интегральных параметров сгустка, имеющих физический смысл, — указывают на возможность использования развитой теории для моделирования структуры электрона в свободном и связанном состоянии. С этой точки зрения интересно рассмотреть прочие (не сферически-симметричные) решения уравнения (1) с тем, чтобы выяснить, какого рода распределения заряда и материи они описывают.

4. Решение в разделяющихся (временных и пространственных) координатах удается получить только при введении комплексной зависимости $\exp\{j\omega t\}$. Благодаря этому трактовка многих результатов близка к используемой в квантовой механике. Детальный анализ строгих нелинейных уравнений подтвердил некоторые результаты работы [4]. Существенно, что теперь локализация заряда внутри ограниченного объема обеспечивается **автоматически**, причем теория позволяет описать самосогласованное распределение заряда **одного знака**, тогда как в работе [4] предметом изучения были квазинейтральные сгустки заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Власов. Статистические функции распределения. Изд-во «Наука», 1966.
2. Н. Lemke, Journ. für Mathims, 1913, **142**, 118.
3. В. И. Гайдук. Самосогласованное релятивистское уравнение для заряженной среды (см. статью данного сборника).
4. В. И. Гайдук. «Радиотехника и электроника», **13**, № 4, 756, 1968.
5. В. И. Гайдук, В. М. Киселев, Е. И. Нефедов. «Радиотехника и электроника», 1969, **14**, № 8, 1469.
6. Н. Мотт, И. Снеддон. Волновая механика и ее применения. Изд-во «Наука», 1966.
7. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во «Наука», 1965.
8. А. Д. Власов. ПМТФ. 1970, № 4.