САМОСОГЛАСОВАННОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ СРЕДЫ

В. И. Гайдук

Москва

Переход к классической динамике точечных частиц достигается введением внешних полей, действующих на заряды, и пренебрежением размерами области локализации заряда.

Постановка задачи. Решение релятивистского уравнения движения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\,\mathrm{grad}\right)\frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\eta\left(\vec{E}+\vec{u}\times\mu_0\vec{H}\right) \tag{1}$$

для частицы заряда e и массы $m_0\left(\eta=\frac{e}{m_0}\right)$ обычно находим при известном поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ либо в предположении, что известное начальное состояние среды возмущается внешними силами или внутренними неустойчивостями. Во втором случае к гидродинамическому уравнению (1) добавляются уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\quad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\rho\vec{u}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho,\ \left(\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}\right) \tag{2}$$

(обычно задаются невозмущенные значения ρ_0, $\vec{u}_0$ и т. д.).

При $\eta = \text{const}$ система (1, 2) содержит десять неизвестных E_α, H_α, u_α, ρ ($\alpha = 1, 2, 3$) и столько же уравнений.

В данной статье делается попытка дать систему уравнений, с помощью которой можно описать состояния поля, содержащие (включающие) сгустки заряда — «частицы». При этом относительно «невозмущенных» распределений заряда и поля ничего неизвестно.

Наводящие соображения. Центр сгустка считаем покоящимся относительно начала координат, «температуру» примем равной нулю, т. е. при отсутствии взаимодействия с другими полями (сгустками) и «стенками», с которыми могло бы взаимодействовать поле сгустка.

Решение целесообразно искать в виде $\vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = \vec{\hat{E}}(r)\, T(t)$ и аналогично для $\vec{H}$, ρ. Из-за релятивистского множителя $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$ это разделение переменных можно реализовать лишь при $\vec{u}(t) = \text{const}$, следовательно, в соответствии с (2) лишь при $T(t) = e^{j\omega t}$. В этом случае уравнение (1) неприменимо, так как его левая часть не зависит от времени. Запишем вместо (1) релятивистское уравнение движения для среды, вводя плотность массы σ [1]:

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\,\text{grad}\right)\frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \rho\left(\vec{E} + \vec{u} \times \mu_0 \vec{H}\right); \tag{3}$$

$$\text{div}\,\sigma\vec{u} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0. \tag{3а}$$

Для систем (2), (3) подстановка $T = e^{j\omega t}$ проходит, если положить $\sigma = \sigma e^{2j\omega t}$; при этом $\frac{\partial}{\partial t}$ в (3) можно отбросить, в (2) — заменить на $j\omega$, а в (3а) — на $2j\omega$; $\vec{\hat{H}}$ и $\vec{u}$ выражаются через амплитуду $\vec{\hat{E}}$. Получаем систему

$$\vec{u}\,\text{grad}\frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}}\left(\vec{\hat{E}} - \frac{\mu_0}{j\omega}\vec{u}\,\text{rot}\,\vec{\hat{E}}\right); \tag{4а}$$

$$\vec{u} = -\frac{c^2}{j\omega}\left(\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{\hat{E}} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\hat{E}}\right)\left(\text{div}\,\vec{\hat{E}}\right)^{-1}; \tag{4б}$$

$$\text{div}\,\hat{\rho}\vec{u} + j\omega\hat{\rho} = 0; \quad \text{div}\,\hat{\sigma}\vec{u} + 2j\omega\hat{\sigma} = 0 \tag{4в}$$

для $\vec{\hat{E}}$, $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ с единственным неопределенным параметром ω.

Постулируемое уравнение для $\vec{\hat{E}}(\vec{r})$. Достоинством уравнений (2), (3) является их релятивистская инвариантность. Однако анализ уравнений (4) пока не привел к выводу о возможности решения поставленной задачи.

Дальше остановимся на другом варианте теории. Предположим, что отношение амплитуд плотностей заряда и массы есть константа

$$\frac{\hat{\rho}(\vec{r})}{\hat{\sigma}(\vec{r})} = \eta; \quad \eta = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Тогда из (4а, б) получим уравнения

$$\vec{u}\,\mathrm{grad}\,\frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \eta\left(\vec{\hat{E}} - \frac{\mu_0}{j\omega}\vec{u}\times\mathrm{rot}\,\vec{\hat{E}}\right); \tag{6}$$

$$\vec{u}\left(\vec{\hat{E}}\right) = -\frac{c^2}{j\omega}\cdot\frac{\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\,\vec{\hat{E}} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\hat{E}}}{\mathrm{div}\,\vec{\hat{E}}} \tag{6a}$$

для единственной неизвестной $\vec{\hat{E}}(\vec{r})$.

Приравнивание отношения $\frac{\vec{\rho}}{\hat{\sigma}}$ константе* и, главное, использование комплексного временного множителя $e^{j\omega t}$ в существенно нелинейной задаче является характерной особенностью предлагаемого подхода. При этом все решения оказываются комплексными, и не очевидно, что величинам $\vec{E}$, $\vec{H}$ и т. д. можно придавать их обычное значение. С этой точки зрения все сказанное можно считать наводящими соображениями, а (6) просто постулируемым уравнением**. Оно может быть оправдано, если в получающемся решении действительным амплитудам $\vec{\hat{E}}$, $\hat{\rho}$ и $\vec{\hat{H}}$ можно

---

* Предположение (5) не совместимо с уравнениями непрерывности (4в), где одна двойка «лишняя». На это обстоятельство было указано Р. И. Ковтуном.

** Заметим, что к уравнению (6а) можно прийти непосредственно от уравнения (1), заменив $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на амплитуды поля $\vec{\hat{E}}$, $\vec{\hat{H}}$ и считая, что $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, причем $\vec{u}\left(\vec{\hat{E}}\right)$ находим из уравнений Максвелла при помощи соотношения (4б).

приписать определенный физический смысл. Дальнейший анализ сферически-симметричного анализа уравнения (6), проведенный в работе [2], показывает, что среди решений названного уравнения содержатся и такие, которые автоматически описывают локализованные в пространстве распределения заряда.

Этот результат, получаемый без введения стенок или внешних сил (помимо учитываемых в обычной теории поля), оправдывает сделанную нами попытку. Скорость $\vec{u}$ оказывается мнимой в результате подстановки $e^{j\omega t}$. При этом j следует считать коэффициентом, связывающим ρ и $\vec{I}$; j в (4б) означает сдвиг фазы на $\frac{\pi}{2}$.

Постоянство $|e^{j\omega t}|$ приводит к квазистатическим распределениям полевых величин, благодаря чему заряд $q = \int \hat{\rho} dV$ остается неизменным при любом t (что было бы невозможно при $T = \sin \omega t$ или $T = \cos \omega t$.

Таким образом, временная зависимость $T = e^{j\omega t}$ в некотором смысле напоминает зависимость $\psi \sim e^{\frac{-jEt}{h}}$ в квантовой механике (связь с последней может оказаться действительно глубокой). Наконец, из-за мнимости $\vec{u}$ под радикалом $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ оказывается действительная величина $\left(1 + \frac{|u|^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, что снимает запрет на существование скоростей, превышающих скорость света c ($\vec{u}$ скорее имеет смысл фазовой скорости, чем какой-либо механической скорости перемещения «частиц» среды: сгусток есть одна частица, не состоящая из более мелких субъединиц, механическое понятие перемещения массы **внутри** сгустка отвергается).

Калибровка заряда и массы. Произвольные константы ω и η можно исключить, если известны заряд e и масса m_0 сгустка. Первое соотношение очевидно

$$e = \int \hat{\rho} dV = \varepsilon_0 \int \operatorname{div} \hat{\vec{E}} dV = \varepsilon_0 \oint \hat{\vec{E}} d\vec{S} = e(\eta, \omega) \tag{7}$$

(S — поверхность, ограничивающая объем V локализованного сгустка). В качестве плотности покоя массы σ_0 выберем лоренц-инвариантную комбинацию плотностей источников

$$\sigma_0 = \frac{1}{\eta} \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{c^2} I^2} = \hat{\sigma}_0 e^{j\omega t}.$$

Следовательно, масса покоя частицы

$$m_0 = \int \hat{\sigma}_0 dV = \frac{1}{\eta} \int \sqrt{\hat{\rho}^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} dV = m_0(\eta, \omega). \tag{7a}$$

Допущение (7а) не носит принципиального характера, так как вид решений уравнения (6) можно исследовать, не придавая константам ω, η конкретных значений. Соотношение (7а) устанавливает электродинамический характер массы покоя, обусловленной распределенными токами и зарядами среды.

Потенциал для продольного поля. Из (1) следует, как известно, уравнение для кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{c^2}\eta\vec{E}\vec{u}.$$

Аналогично из (6) следует

$$\vec{u}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{c^2}\eta\vec{u}\vec{\hat{E}}=\frac{1}{c^2}\,\eta\vec{u}\vec{\hat{E}}_{11}, \qquad (8)$$

где $\vec{\hat{E}}_{11}$ означает продольную (совпадающую по направлению с $\vec{u}$) часть поля $\vec{\hat{E}}$. Следовательно, можно ввести такой потенциал $\hat{\varphi}$, при котором

$$\vec{\hat{E}}_{11}=-\mathrm{grad}\,\hat{\varphi};\quad \hat{\varphi}=-\frac{c^2}{\eta}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (9)$$

Наличие $\hat{\varphi}\left(\vec{r}\right)$ облегчает интерпретацию результатов и позволяет построить полезные аналогии.

ВЫВОДЫ

Основным результатом работы является вывод постулируемого уравнения (6) для амплитуды электрического поля $\vec{\hat{E}}\left(\vec{r}\right)$, описывающего квазистатическое распределение заряда $\hat{\rho}=\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{\hat{E}}$. Константы теории η, ω можно исключить из окончательных соотношений калибровочными уравнениями (7). Альтернативный вариант* теории: система релятивистски-инвариантных уравнений (2), (3), которая сводится к системе уравнений (4).

---

* Необходимо сделать, однако, существенную оговорку. Мы не уверены в том, что система уравнений (4) более строга, чем постулируемое уравнение (6). Последнее обладает тем преимуществом, что переходит в классическое уравнение движения для амплитуд соответствующих полевых величин

Если в правую часть (6) добавить заданные (внешние) поля $\hat{\vec{E}}_{\text{внеш}}$, $\hat{\vec{H}}_{\text{внеш}}$, то измененное таким образом уравнение (6) позволит найти самосогласованное распределение заряда во внешнем поле (один такой пример также рассмотрен в работе [2]). Переход к обычной классической динамике осуществляется, если не учитывать (в уравнениях движения) собственного поля сгустка заряда. В то же время от обычного самосогласованного рассмотрения уравнений (1), (2) изложенный подход отличается следующим.

1. «Исходное» невозмущенное состояние среды в нашей частице столь же неизвестно, как и возмущенное: зависимость от времени носит формальный характер типа $e^{j\omega t}$.

2. В нелинейной задаче вообще считается допустимым поиск решения вида $e^{j\omega t}$. Последнее оправдывается тем, что теория приводит к разумным квазистатическим распределениям заряженной материи в предположении, что действительные амплитуды $\hat{\vec{E}}(\vec{r})$, $\hat{\rho}(\vec{r})$, $\hat{\vec{H}}(\vec{r})$ можно трактовать обычным образом.

Заметим, что идея применения комплексной подстановки для описания неизлучающих сгустков заряда была выдвинута автором в работе [3]. Проведенный там анализ базировался на менее строгих **линейных** уравнениях, их спектр решений гораздо беднее: среди них нет таких решений, которые описывали бы локализованные сгустки заряда без использования неаналитической операции обрыва решений при нулевом значении поля $\vec{E}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Маделунг. Математический аппарат физики. Физматгиз, 1960.
2. В. И. Гайдук, Е. И. Нефедов. Частицеподобное самосогласованное сферически-симметричное распределение неизлучающего заряда (см. статью настоящего сборника).
3. В. И. Гайдук. К электродинамике сгустков зарядов, локализованных собственным электромагнитным полем. «Радиотехника и электроника», 13, № 4, 756, 1968.

$\hat{\vec{E}}$ и $\hat{\vec{H}}$. Здесь (6) используется «очевидное» допущение о том, что распределение плотности вещества тождественно распределению плотности заряда. Можно привести более убедительный аргумент, что анализ сферически-симметричного решения системы (4) не указывает на возможность локализации заряда внутри некоторой сферической области $r(R)$, тогда как уравнение (6) такое решение содержит. Эти соображения заставляют усомниться в правомерности уравнения непрерывности (4в) для плотности массы вещества $\hat{\sigma}$ (где одна двойка «лишняя»). Возможно, оно не учитывает спины частицы и поэтому должно быть изменено.