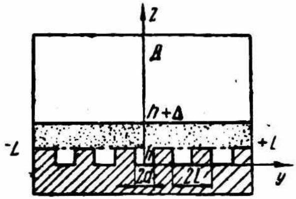
К САМОСОГЛАСОВАННОЙ ТЕОРИИ ГЕНЕРАТОРОВ РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

Л. В. Бржечко

Харьков

В последние годы внимание исследователей неизменно привлекают резонансные генераторы [1, 2, 3, 4]. Именно к этому классу приборов могут быть отнесены резонансные ЛОВ и клистроны с распределенным взаимодействием (ладдертроны). Достоинства генераторов данного типа подробно освещены в работах, [2—4]. В работах [2, 3] с целью теоретического анализа действия прибора используются приближенные методы, представляющие собой сочетание электродинамического подхода и метода эквивалентных схем.



В настоящей статье приводится строгое самосогласованное решение электродинамической задачи о возбуждении электронным пучком системы, показанной на рисунке. Исследуемая система является идеализированной моделью генератора резонансного типа. Решение приводится в приближении теории малого сигнала, краевая задача решается с использованием точных граничных условий. Для построения самосогласованного решения задачи нужно решить линеаризованную систему уравнений Максвелла и уравнения движения электронов, считая, что сильное продольное магнитное поле обеспечивает движение электронов только в направлении оси Oy. Электрическое поле $\vec{E}$, скорость пучка $\vec{v}$ и плотность заряда ρ представляем в виде суммы постоянных и малых переменных величин, гармонически зависящих от времени.

Пролинеаризуем уравнения Максвелла и уравнения движения и перейдем от полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, плотности n и тока $\vec{j}$ к потенциалу Герца $\vec{\pi}$ и плотности источника P:

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2};$$

$$\vec{H} - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\pi}}{\partial t};$$

$$n = -\operatorname{div} P; \quad \vec{j} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}. \tag{1}$$

В результате получим систему линейных уравнений относительно отличных от нуля компонент поля π_y и P_y

$$\begin{gathered}\Delta_{yz}\pi_y + \frac{\omega^2}{c^2}\pi_y = 4\pi P_y;\\ \frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} - 2i\frac{\omega}{v_0}\frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\omega^2}{v^2}P_y = \\ = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega_p^2}{v_0^2}\cdot\frac{\partial^2\pi_y}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\pi_y,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e l^2}{m_e}$ — плазменная частота колебаний; c — скорость света в вакууме; e, m_e — заряд и масса электронов.

Для области, не занятой пучком (1), уравнение (2) переходит в уравнение

$$\Delta_{yz}\pi_y + \frac{\omega^2}{c^2}\pi_y = 0. \tag{2a}$$

Система уравнений (2) вместе с граничными условиями для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на поверхности пучка и решетки дает решение поставленной задачи.

Решение уравнения в резонаторе можно искать в виде ряда Фурье по системе функций, полной на интервале (0; $2L$):

$$\pi^l = je^{l\omega t}\sum_{\mu=0}^{\infty}\pi_\mu^{(l)}(z)\cos\frac{\pi\mu}{2L}(y+L) \tag{3}$$

(l — индекс области пространства).

Учитывая наличие периодической структуры внутри резонатора, целесообразно записать (3) в виде разложения его по колебаниям собственных режимов периодической системы. Известно, что для любой периодической структуры существуют собственные режимы. Под ними подразумевается непрерывное решение уравнений Максвелла в области, дополнительной к брусьям, представляемое вне структуры в виде

$$\vec{\pi}^{l} = \vec{j}\, e^{i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}\alpha_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n(z)\, e^{-i\pi_n \frac{y}{l}}. \tag{4}$$

Для удовлетворения граничным условиям на проводящих торцах резонатора и на дифракционной решетке следует связать разложения (3) и (4). Уравнение (3) с учетом (4) запишется в виде

$$\vec{\pi} = \vec{j}\, e^{-i\omega t} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi^{l}_{n,m}(z)\, e^{i\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{m}{2N}\right)(y+L)}, \tag{5}$$

где $N = \frac{L}{e}$ — целое число; L — длина резонатора; l — период структуры; $m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2 \ldots \pm N$.

Заметим теперь, что каждая пара по индексу m удовлетворяет граничному условию $E_z = 0$ на стенках $y = L$. Поскольку каждое слагаемое этой пары представляет ряд Фурье по системе функций, полной на интервале $(0,\ 2l)$, надлежащим выбором функции $\pi_{n,m}(z)$ можно обеспечить выполнение граничных условий на стенке $z = D$ и на поверхности решетки. Следовательно, такая пара является собственной функцией краевой электродинамической задачи для данного резонатора и может определить один из типов его колебаний. Каждому типу колебаний соответствует частота ω_m. Задача сводится к отысканию этой частоты. Вследствие наличия внутри резонатора электронного пучка, скорость которого близка к скорости одной (в нашем случае нулевой) пространственной гармоники, частота колебаний может быть комплексной $\omega'' > 0$.

Запишем компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для разных областей пространства

$$E_y^{(1)} = e^{-i\omega_m t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^2 \left[A_n e^{iP_n(z-h-\Delta)} + B_n e^{iP_n(z-h-\Delta-b)}\right] e^{i\alpha_n(y+L)};$$

$$E_y^{(2)} = e^{-i\omega_m t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^2 \left[\hat{A}_n e^{i\Gamma_n(z-h)} + \hat{B}_n e^{-i\Gamma_n(z-h-\Delta)}\right] e^{i\alpha_n(y+L)}; \tag{6}$$

$$E_y^{(3)} = e^{-i\omega_m t} \sum_{r=0}^{\infty} 2iC_r q_r \cos q_r z \cos \frac{\pi r}{2d} (y + d + L + 2Ml)\, e^{i2k\alpha Nl};$$

$$H_x^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_m}{c} P_n \left[A_n e^{iP_n(z-h-\Delta)} - B_n e^{-iP_n(z-h-\Delta-b)}\right] \times$$

$$\times\, e^{i\alpha_n(y+L)} e^{-i\omega_m t};$$

$$H_y = H_z = E_x = 0;$$

$$H_x^{(2)} = e^{-i\omega_m t} \frac{\omega_m}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n \left[A_n e^{i\Gamma_n(z-h)} -\right.$$

$$\left. - B_n e^{i\Gamma_n(z-h-\Delta)}\right] \cdot e^{i\alpha_n(y+a)};$$

$$H_x^{(3)} = e^{-i\omega_m t} i \frac{\omega_m}{c} \sum_{r=0}^{\infty} -2i \cos q_r z \cos \frac{\pi r}{2d} (y + d + L + 2Ml)\, e^{i2k\alpha Nl},$$

где

$$K = \frac{\omega}{v}; \quad \Gamma_n^2 = P_n^2 \rho_n^2;$$

$$\rho_n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - v_0 \alpha_n)^2};$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{l}\left(n + \frac{m}{2N}\right); \quad P_n^2 = \frac{\omega_m^2}{c^2} - \alpha_n^2;$$

$$q_r = \sqrt{\frac{\omega_m^2}{c^2} - \left(\frac{\pi r}{2d}\right)^2}; \quad E_z = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими безразмерными параметрами:

$$\theta = \frac{d}{l}; \quad \beta = \frac{v_0}{c}; \quad \delta = \frac{h}{l}; \quad \varkappa = \frac{\omega_p l}{\pi c}$$

(v_0 — невозмущенная скорость пучка).

Для определения коэффициентов воспользуемся граничными условиями для $\vec{E}_y$ и $\vec{H}_x$ при $z = h + \Delta$; $z = D$ и $z = h$ на металле и решетке.

Для C_r получаем следующую систему функциональных уравнений (при $d < |y| < l$ и $|y| < d$):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n P_n R_n = \begin{cases} \sum_{r=0}^{0} C_r \sin q_r h \cos \frac{\pi r}{2d} (y + d); \end{cases}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_r \cos q_r h \cdot \cos \frac{\pi r}{2d}(y+d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\alpha_n y},$$

где

$$X_n = B_n P_n [\rho_n \sin P_n b \cos \Gamma_n \Delta - \rho_n \cos P_n b \cos \Gamma_n \Delta];$$

$$R_n = \frac{\rho_n \sin P_n b \cos \Gamma_n \Delta + \cos P_n b \sin \Gamma_n \Delta}{\rho_n (\rho_n \sin P_n b \sin \Gamma_n \Delta - \cos P_n b \cos \Gamma_n \Delta)}. \quad (7)$$

Обозначим $P_n = \gamma_n$.

При помощи определения коэффициентов Фурье переходим к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$X_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s P_{ns} = 0, \quad (8)$$

где

$$P_{ns} = P_{ns}^{(0)} + P_{ns}^{(1)};$$

$$P_{ns}^{(0)} = \theta \frac{\operatorname{tg} \pi \varkappa \delta}{\rho_n R_n} S_{0n} S_{0s};$$

$$P_{ns}^{(1)} = \theta^2 \frac{4\varkappa \alpha_n}{\rho_n R_n} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{(2\varkappa\theta)^2 - r^2} \operatorname{tg} \pi \varkappa \delta \psi;$$

$$S_{rn} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} (2\varkappa\theta - r)}{\frac{\pi}{2} (2\varkappa\theta\alpha_n - r)}; \quad \psi = \sqrt{1 - \frac{r}{2\varkappa\theta}}.$$

Частоту находим из условия равенства нулю определителя системы уравнений (8), при этом никаких ограничений на геометрические параметры и частоту колебаний не накладывается.

При некоторых ограничениях, накладываемых на параметры системы, уравнение для нахождения частоты можно значительно упростить. В случае узких щелей $\theta \ll 1$ по аналогии с работой [5] можно показать, что при выполнении условия $\varkappa\theta < 0{,}5$ система уравнений (7) заменяется с точностью до величины порядка θ^2 более простой и удобной для дальнейшего исследования системой:

$$X_n^0 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X^{(0)} P_{ns}^{(0)} = 0, \quad (9)$$

где

$$X_n^{(0)} = -X_n^{(1)} + X_r;$$

$$X_n^{(1)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s^{(1)} P_{ns} + \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} X_s P_{ns}^{(1)}.$$

Дисперсионное уравнение, получаемое из условия равенства нулю детерминанта системы (9), имеет сравнительно простой вид

$$M = \frac{1}{\varkappa\theta \operatorname{tg} 2\pi\varkappa\delta}, \tag{10}$$

где

$$M = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\rho_s^2 \operatorname{tg} \pi\Delta\Gamma_n \operatorname{tg} \pi b\gamma_n - \rho_n}{\gamma_n [\rho_n \operatorname{tg} \pi b\gamma_n + \operatorname{tg} \pi\Delta\Gamma_n]}.$$

В работе [6] получено выражение для проводимостей сложного резонатора, нагруженного электронным пучком. Использовав эти результаты и сделав соответствующие преобразования, можно получить уравнение (10). Существенное отличие рассмотренного решения задачи от ее решения в работе [6] состоит в том, что в данной работе дан строгий вывод уравнений (10), благодаря чему удалось определить пределы применимости и степень приближения этого уравнения (при необходимости можно получить уравнение с более высокой точностью).

После громоздких преобразований уравнение (10) примет следующий вид:

$$\rho_0 \operatorname{tg} \pi\rho_0\gamma_0 = K, \tag{11}$$

где

$$K = \frac{\gamma_0 \left\{ \operatorname{ctg} 2\pi\varkappa\delta + 2\varkappa\theta \ln \sin \frac{\pi\theta}{2} - L \right\}}{i\varkappa\theta};$$

$$L = \frac{\varkappa\theta \operatorname{ctg} \gamma - nD\pi}{\gamma - n}.$$

Уравнение (11) позволяет исследовать работу генератора в режиме поверхностных волн и режиме дифракционного излучения.

Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$\varkappa = \varkappa_0 + \xi,$$

где ξ — малая добавка; $\varkappa_0$ — резонансная частота холодной системы m-типа колебаний, или собственная частота пучка заданных геометрических размеров, ограниченного проводящими торцами.

Резонансная частота $\varkappa_0$ для различных режимов генератора легко определяется методами, изложенными в работе [7]. Подставляя значения резонансных параметров пучка, резонатора и частоту $\varkappa_0$ методом, предлагаемым в [8], определим величину ξ

$$\xi = \frac{\psi_1(\delta, \Delta, \varkappa_p, \beta, \theta) + \psi_2(\delta, \Delta, \varkappa_p, \theta, \beta)}{\psi_3(\delta, \Delta, \varkappa_p, \beta, \theta)}; \tag{12}$$

$$\varkappa = \varkappa_0 + \frac{\psi_1(\delta, \Delta, \varkappa_p, \theta) + \psi_2(\delta, \Delta, \varkappa_p, \theta, \beta)}{\psi_3(\delta, \Delta, \varkappa_p, \beta, \theta)}. \tag{13}$$

Так как исследование решения (13) является материалом отдельной статьи, мы не выписываем явный вид функций ψ_1, ψ_2, ψ_3; отметим только, что существует диапазон параметров, при котором величина ξ — комплексна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Foster P. I. E. G. v. 54; № 4, 1966.
2. Wesseberg. Calif. Rept. March, 1957.
3. Mizokami. Mikrowave, j. 1968, v. 11, № 11, p. 65—69.
4. Л. П. Кап, И. В. Ильина. Электроника СВЧ, вып. 2. Изд-во «Советское радио», 1969.
5. В. Г. Сологуб. Наклонное падение H-поляризованной плоской волны на периодическую решетку, составленную из брусьев прямоугольного сечения. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
6. В. М. Лопухин. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. ГИТТЛ, М., 1953.
7. Л. Н. Литвиненко и др. «Изв. вузов, Радиофизика». Изд-во Горьковского ун-та, 1969.
8. М. Л. Левин. Отчет РТИ АН СССР, 1959.