К ЛИНЕЙНОЙ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Е. Б. Сидоренко

Харьков

При движении электронного пучка над периодической структурой возникает так называемое дифракционное излучение. Некоторые свойства этого излучения исследовались в приближениях заданного тока [1] и заданного поля [2]. Однако обратное воздействие излучения на пучок, в результате которого происходит перераспределение тока в пучке, не учитывалось.

В настоящей статье приводится строгое решение задачи дифракционной электроники, которая решается в самосогласованной постановке. Электронный пучок конечной толщины a движется в вакууме над дифракционной решеткой со скоростью $v = v_0 + \tilde{v}$ вдоль оси oy, плотностью электрического тока $j = j_0 + \tilde{j}$ и плотностью заряда $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$. Решетка расположена на границе диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ (слой диэлектрика конечной толщины h). Сверху (рис. 1) на расстоянии $a + b$ от решетки расположен экран, на котором выполняются граничные условия Леонтовича. Период решетки l, ширина металлических лент d. Образующие лент параллельны оси ox. Начало координат помещено в середину металлических лент. Для удобства решения разобьем всю систему на области $I - a < z < a + b$; $II - 0 < z < a$; $III - -h < z < 0$; $IV - z < -h$.

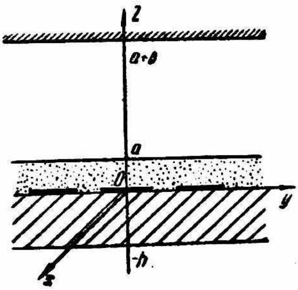

Рис. 1.

Для получения самосогласованного решения необходимо совместно решить систему уравнений Максвелла, уравнение движения электронов и уравнение непрерывности. Линеаризуя их как обычно, перейдем от полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ к потенциалу Герца $\vec{\Pi}$

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2};\ \vec{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}. \quad (1)$$

Ввиду периодичности системы разложим v, j и ρ в ряд Фурье по y и, подставляя в уравнения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m}E_y;\quad \frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (2)$$

получим систему волновых уравнений для каждой из областей

$$\Delta\vec{\Pi}^{(I)} + k_n^2\vec{\Pi}^{(I)} = 0;\quad \Delta\vec{\Pi}^{(II)} + \Gamma_n^2\vec{\Pi}^{(II)} = 0;$$
$$\Delta\vec{\Pi}^{(III)} + q_n^2\vec{\Pi}^{(III)} = 0;\quad \Delta\vec{\Pi}^{(IV)} + k_n^2\vec{\Pi}^{(IV)} = 0, \quad (3)$$

где

$$k_n = \sqrt{k^2 - \left(k\alpha + \frac{2\pi}{l}n\right)^2};\quad q_n = \sqrt{\varepsilon k^2 - \left(k\alpha + \frac{2\pi}{l}n\right)^2};$$

$$\Gamma_n = k_n\sqrt{1 - \frac{\omega_e^2}{\left[v_0\left(k\alpha + \frac{2\pi}{l}n\right) - \omega\right]^2}};\quad \omega_e^2 = \frac{e\rho_0}{m};$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\ \beta = \frac{v_0}{c};\ \alpha = \beta^{-1};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Решение уравнений такого типа можно представить в виде

$$\Pi_n(z) = C_n e^{ik_n z} + D_n e^{-ik_n z},\ a < z < a + b; \quad (4)$$
$$\Pi_n(z) = A_n e^{i\Gamma_n z} + B_n e^{-i\Gamma_n z},\ 0 < z < a;$$

$$\Pi_n(z) = F_n e^{iq_n z} + P_n e^{iq_n z}, \quad -h < z < 0;$$

$$\Pi_n(z) = Q_n e^{-ik_n z}, \qquad z < -h.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n, F_n, P_n и Q_n воспользуемся граничными условиями для E_y и H_x при $z = a + b$, $z = a$, $z = 0$, $z = -h$, а также при $z = 0$ на щели и на металле. Разрешив эту систему уравнений относительно каких-либо двух неизвестных коэффициентов и использовав граничные условия на щели и на металле, получим следующую систему функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\left(k\alpha + \frac{2\pi}{l} n\right) y} = 0; \quad |y| < \frac{d}{2}; \tag{5}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n^2 X_n \frac{S_n}{G_n} e^{ik_n h} e^{i\left(k\alpha + \frac{2\pi}{l} n\right) y} = 0, \quad \frac{d}{2} < y < l - \frac{d}{2}.$$

Преобразуем несколько эту систему и введем новые обозначения

$$G_n = \frac{i\gamma_n \sin \Gamma_n a \left(1 - R_n e^{2ik_n a}\right) + \cos \Gamma_n a \left(1 + R_n e^{2ik_n a}\right)}{\gamma_n \cos \Gamma_n a \left(1 - R_n e^{2ik_n a}\right) + i \sin \Gamma_n a \left(1 + R_n e^{2ik_n a}\right)} \times$$

$$\times S_n - k_n \cos q_n h - i q_n \varepsilon \sin q_n h; \; Y_n = \left(k\alpha + \frac{2\pi}{l} n\right) X_n;$$

$$R_n = \frac{k_n + \eta\omega}{k_n - \eta\omega} e^{-2ik_n(a+b)}; \quad \gamma_n = \frac{\Gamma_n}{k_n}; \quad \eta = (1 - i)\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}};$$

$$S_n = \cos q_n h - \frac{ik_n}{q_n \varepsilon} \sin q_n h; \quad \chi_n = -1 - k_n \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{(\varkappa\alpha + n)^2}} \, \frac{S_n}{G_n}.$$

Таким образом, получена следующая система функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{i\left(k\alpha + \frac{2\pi}{l} n\right) y} = 0, \qquad |y| < \frac{d}{2};$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varkappa\alpha + n|}{\varkappa\alpha + n} Y_n (1 + \chi_n) e^{i\left(k\alpha + \frac{2\pi}{l} n\right) y} = 0, \quad \frac{d}{2} < y < l - \frac{d}{2}; \tag{6}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{Y_n}{\left(k\alpha + \frac{2\pi}{l} n\right)} = 0, \qquad y = \frac{l}{2}.$$

Как показано в работе [3], такую систему функциональных уравнений можно свести с помощью метода Римана — Гильберта к бесконечной однородной системе линейных уравнений.

Приравняв определитель этой системы нулю, получим характеристическое уравнение задачи

$$\det\left\{\frac{|n|}{n}W_m^n\chi_n-\delta_m^n\right\}=0,\ m,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ \ldots \qquad (7)$$

Из данного уравнения определим условия самовозбуждения дифракционного излучения:

$$W_m^n=V_m^n(u)-R_m(u)\frac{V_\sigma^n(u)}{R_\sigma(u)},\quad u=\cos\frac{\pi d}{l}, \qquad (8)$$

а $V_m^n(u)$, $R_m(u)$, $V_\sigma^n(u)$, $R_\sigma(u)$ выразим через полиномы Лежандра [3]. Теорема о существовании такого определителя доказана [4].

Это позволяет применить для его вычисления метод редукции и найти решение характеристического уравнения с любой наперед заданной точностью.

Введем новые безразмерные параметры и проанализируем (7):

$$\varkappa=\frac{\omega l}{2\pi c}=\frac{l}{\lambda};\ \beta=\frac{v_0}{c};\ \varkappa_p=\frac{\omega_p l}{2\pi c}. \qquad (9)$$

Представим $\varkappa\alpha=n_0+\nu$, где $|\nu|<\frac{1}{2}$, n_0 — ближайшее к $\varkappa\alpha$ целое число.

Исследуем режим излучения одной ($n=-1$) основной гармоники.

Для этого разложим k_n, Γ_n и q_n в ряд Лорана и, ограничиваясь в (7) определителем третьего порядка, заменим (7) с точностью до членов $0(\nu^2)$ приближенным трансцендентным уравнением

$$\operatorname{tg}\Gamma_0 a=\nu\frac{F(\nu)}{P(\nu)}, \qquad (10)$$

где $F(\nu)$ и $P(\nu)$ можно представить в виде ряда по степеням ν.

Устремив $h\to 0$, $\varepsilon\to 1$, эту систему можно свести к более простой.

В такой системе при определенных соотношениях между параметрами пучка, периодической структуры и устройства обратной связи отражательного экрана возникают высокодобротные электромагнитные колебания. В этом случае малые параметры χ_{-1} и χ_0 несколько иные

$$\chi_{-1}=1+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\nu^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\nu^2}}e^{2ik(a+b)}; \qquad (11)$$

$$\chi_0=1+\sqrt{1-\beta^2}\frac{\beta\nu\operatorname{ctg}\Gamma_0 a\left(1-e^{-2ik_0 b}\right)}{\varkappa_p\left(1-e^{-2ik_0 b}\right)-2\beta\nu e^{-2ik_0 b}\operatorname{ctg}\Gamma_0 a}.$$

Теперь вместо (10) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\operatorname{tg} \Gamma_0 a = \nu \frac{\beta \sqrt{1-\beta^2} C}{\varkappa_p (B\nu + C)},$$

$$B = u - 1 - \frac{(1-u)^2}{2} - \frac{(1-u)^2}{4} \sqrt{\nu^2 - \varkappa^2}\,(1 - e^{2ik(a+b)}) +$$

$$+ \frac{1-u^2}{4} \ln \frac{1+u}{2} \sqrt{\nu^2 - \varkappa^2}\,(1 - e^{2ik(a+b)}); \qquad (12)$$

$$C = \frac{(1-u)^2}{4} \sqrt{\nu^2 - \varkappa^2}\,(1 - e^{2ik(a+b)}).$$

На рис. 2 представлено распределение корней дисперсионного уравнения (12). Если сравнить распределение корней, представленных на рис. 2, с таким же распределением для системы без экрана [5], можно заметить, что величина мнимой части ν увеличилась на порядок. Следовательно, наличие экрана привело к увеличению излучаемой мощности, причем, варьируя расстояние $a + b$, можно добиться оптимального значения пускового тока.

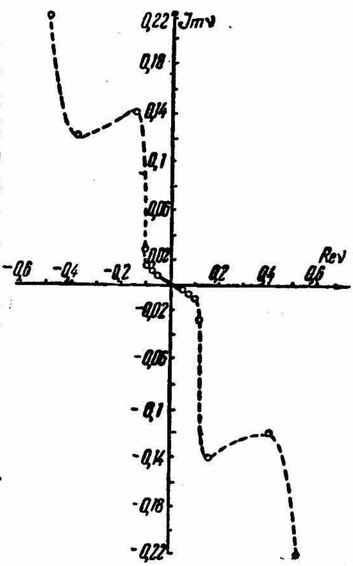

Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский. ЖТФ, т. 34, вып. 10, 1964.
2. Ф. С. Русин. Электроника больших мощностей, вып. 5, 1968.
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, т. 32, вып. 4, 1962.
4. В. Г. Сологуб, В. П. Шестопалов, Г. Г. Половников. ЖТФ, т. 37, вып. 4, 1967.
5. А. М. Радин, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. ЖТФ, т. 39, вып. 7, 1969.