

# ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ НАД ЛЕНТОЧНОЙ РЕШЕТКОЙ

А. С. Сисоев

Харьков

При исследовании дифракционного излучения обычно рассматривают двумерные задачи. Важным объектом исследования является случай, когда источники излучения ограничены, в частности, точечный заряд, сгусток, электронный поток конечной ширины. С одной стороны, такие задачи позволят расширить понимание самого физического явления, с другой, — рассмотреть модели, весьма близкие к реальным устройствам.

Рассмотрим движение точечного заряда над ленточной решеткой (рис. 1). Ленточная решетка расположена в плоскости  $xoy$ , ее ленты являются идеально проводящими и бесконечно тонкими, а решетка — не ограничена в обоих направлениях. Период решетки равен  $l$ , расстояние между соседними лентами  $d$ . Систему координат  $xoy$  выбираем так, чтобы ось  $oy$  была перпендикулярна к лентам решетки, а начало координат лежало в середине одной из щелей. Точечный заряд движется в плоскости, параллельной  $xoy$  и отстоящей от нее на расстояние  $a$  с постоянной скоростью  $v$ , так что его траектория составляет острый угол  $\delta$  с осью  $oy$ . Система координат  $XOY$  повернута относительно  $xoy$  на угол  $\delta$ , ось  $OY$  направлена вдоль траектории движения заряда и ее направление совпадает с направлением движения последнего.

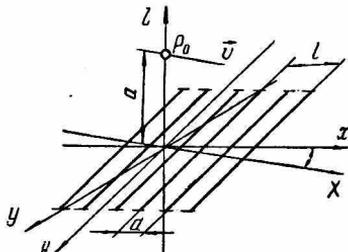


Рис. 1.

Предполагая, что в начальный момент времени  $t = 0$  заряд находится на оси  $oz$ , плотность заряда можно записать

$$\rho = \rho_0 \delta(X) \delta(Y - vt) \delta(z - a).$$

Электромагнитное поле заряда, движущегося в однородной изотропной среде, удобно определять через поляризационный вектор Герца  $\vec{\Pi}^0(x, y, z, t)$ , который в нашем случае в системе координат  $xuz$  имеет вид

$$\vec{\Pi}^0(x, y, z, t) = (\vec{x}_0 \sin \delta + \vec{y}_0 \cos \delta) \frac{i\rho_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p|z-a|}}{p\omega} e^{i\tau x + ihy - i\omega t} d\omega dv, \quad (1)$$

где

$$\tau = \frac{\omega}{v} \sin \delta + \nu \cos \delta, \quad h = \frac{\omega}{v} \cos \delta - \nu \sin \delta,$$

$\vec{x}_0$  и  $\vec{y}_0$  — орты вдоль осей  $ox$  и  $oy$  соответственно;

$$p = \left[ \nu^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Формулу (1) можно рассматривать как представление поля точечного заряда через поле бесконечных линейных источников, плотность заряда в которых модулирована по гармоническому закону.

Для собственного электромагнитного поля точечного заряда можно выполнить интегрирование по  $\nu$  в формуле (1), однако для удобства решения задачи об излучении его целесообразно сохранить в интегральном представлении, а интегрирование выполнить в конечных формулах.

Выражение для вектора Герца  $\vec{\Pi}^0(x, y, z, t)$  при  $z - a < 0$  удобно переписать в виде

$$\vec{\Pi}^0 = (\vec{x}_0 \sin \delta + \vec{y}_0 \cos \delta) \frac{i\rho_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega dv}{p\omega} e^{ik(\vec{n} \cdot \vec{r}) - i\omega t}, \quad (2)$$

где единичный вектор

$$\vec{n} = \{\alpha, \beta, -\gamma\}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

определяет компоненты волнового вектора

$$\alpha = \frac{\tau}{k}, \quad \beta = \frac{h}{k}, \quad \gamma = i \frac{p}{k}$$

и радиус-вектор

$$\vec{r} = \{x, y, z - a\}.$$

Определим поле, возникшее в результате дифракции этой суперпозиции плоских волн, представляющих поле источника, на решетке. Искомое поле должно удовлетворять обычным граничным условиям в плоскости решетки  $z=0$  и принципу погашаемости при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\vec{E}(x, y, z, t)$  и  $\vec{H}(x, y, z, t)$  — искомое поле, поэтому

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \vec{e}(y, z; \omega, \nu) e^{ik(ax+\beta y)-i\omega t} d\omega d\nu; \quad (3)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \vec{h}(y, z; \omega, \nu) e^{ik(ax+\beta y)-i\omega t} d\omega d\nu, \quad (4)$$

где  $\vec{e}(y, z; \omega, \nu)$  и  $\vec{h}(y, z; \omega, \nu)$  не зависят от  $x$  и являются периодическими функциями от  $y$  с периодом  $l$ . Разлагая эти векторы в ряде Фурье по  $y$ , используя уравнения Максвелла и учитывая при этом поведение искомого поля на бесконечности, имеем

$$\vec{e}(y, z; \omega, \nu) = \begin{cases} e^0 e^{-ik\gamma(z-a)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{e}^+(m) e^{ik\gamma m z} e^{i\frac{2\pi m}{l}y} & (z > 0), \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{e}^-(m) e^{-ik\gamma m z} e^{i\frac{2\pi m}{l}y} & (z < 0); \end{cases} \quad (5)$$

$$\vec{h}(y, z; \omega, \nu) = \begin{cases} \vec{h}^0 e^{-ik\gamma(z-a)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{h}^+(m) e^{ik\gamma m z} e^{i\frac{2\pi m}{l}y} & (z > 0); \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{h}^-(m) e^{-ik\gamma m z} e^{i\frac{2\pi m}{l}y} & (z < 0), \end{cases} \quad (6)$$

где векторные коэффициенты

$$\vec{e}^{\pm}(m) = \{e_x^{\pm}(m), e_y^{\pm}(m), e_z^{\pm}(m)\}, \quad \vec{h}^{\pm}(m) = \{h_x^{\pm}(m), h_y^{\pm}(m), h_z^{\pm}(m)\}$$

удовлетворяют условиям

$$ae_x^{\pm}(m) + \beta_m e_y^{\pm}(m) \pm \gamma_m e_z^{\pm}(m) = 0, \quad h_x^{\pm}(m) = \beta_m e_z^{\pm}(m) \mp \gamma_m e_y^{\pm}(m);$$

$$h_y^{\pm}(m) = \pm \gamma_m e_x^{\pm}(m) - ae_z^{\pm}(m), \quad h_z^{\pm}(m) = ae_y^{\pm}(m) - \beta_m e_x^{\pm}(m),$$

а

$$\gamma_m = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta_m^2}, \quad \beta_m = \beta + \frac{m}{x}, \quad x = \frac{kl}{2\pi},$$

причем знак у корня выбирается так, чтобы  $\text{Im } \gamma_m > 0$ , а если  $\text{Im } \gamma_m = 0$ , то  $\text{Re } \gamma_m \geq 0$ .

Для получения искомого поля эти коэффициенты необходимо подобрать так, чтобы была обеспечена непрерывность поля на

щелях и обращены в нуль тангенциальные компоненты  $\vec{E}(x, y, z, t)$  на лентах.

Удовлетворяя граничным условиям, получаем систему функциональных уравнений, в которой после некоторых преобразований, аналогичных произведенным в работе [2], уравнения, содержащие  $e_x^+(m)$  и  $h_x^+(m)$ , разделяются. В результате получаем две системы функциональных уравнений для  $e_x^+(m)$  и  $h_x^+(m)$ , которые по виду совершенно аналогичны. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать систему для  $e_x^+(m)$

$$\beta e_x^0 e^{-\rho a} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m e_x^+(m) e^{im\varphi} = 0, \quad \theta < |\varphi| < \pi; \quad (I)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e_x^+(m) e^{im\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \theta; \quad (II)$$

$$e_x^0 e^{-\rho a} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_x^+(m) (-1)^m = 0, \quad (III)$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi}{l} y, \quad \theta = \frac{\pi d}{l}.$$

Если в системе (I) — (III) произвести замену  $e_x^0(m)$  на  $h_x^0(m)$ ,  $e_x^+(m)$  на  $\hat{h}_x^+(m)$ ,  $\varphi$  на  $\hat{\varphi} = \frac{2\pi}{l} y + \pi$ ,  $\theta$  на  $\hat{\theta} = \frac{\pi(l-d)}{l}$ , то получим систему функциональных уравнений для нахождения  $\hat{h}_x^+(m)$ , где

$$\hat{h}_x^+(m) = (-1)^m h_x^+(m), \quad (m \neq 0);$$

$$\hat{h}_x^+(0) = -h_x^0 e^{-\rho a} + h_x^+(0).$$

Для решения полученной системы (I) — (III) применим методику, аналогичную использованной в работе [1].

Так как  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  и  $-\infty \leq \nu \leq \infty$ , всегда можно представить  $\chi\beta$  в виде  $\chi\beta = m_0 + \mu$ , где

$$m_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad -\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{1}{2}.$$

Введем также обозначение

$$\chi_{m+m_0} = -\frac{\beta_m e_x^+(m)}{\beta e_x^0 e^{-\rho a}}.$$

С учетом введенных обозначений, ссылаясь на результаты работы [1], можно систему уравнений (I) — (III) заменить эквивалентной ей системой линейных алгебраических уравнений

$$x_n - \delta_n^{m_0} = -\frac{|m_0|}{m_0} V_{n-1}^{m_0-1}(u) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \frac{|m|}{m} \varepsilon_m V_{n-1}^{m-1}(u) + P_n(u) (x_0 - \delta_0^{m_0}); \quad (7)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \frac{|m|}{m} \varepsilon_m V_{-\mu-1}^{m-1}(u) - \frac{|m_0|}{m_0} V_{-\mu-1}^{m_0-1}(u) + P_{\mu-1}(u) (x_0 - \delta_0^{m_0}) = 0. \quad (8)$$

Величины  $\varepsilon_m$  определяются следующим образом:

$$\varepsilon_m = 1 + \left[ \frac{x^2 - x^2 \alpha^2}{(m + \mu)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Существенно при этом, что

$$\varepsilon_m = 0 (m^{-2}) \text{ при } |m| \rightarrow \infty,$$

т. е.

$$|\varepsilon_m| = \frac{x^2 - x^2 \alpha^2}{(m + \mu)^2}$$

в предположении, что  $x^2 \alpha^2 \leq x^2$ . Это ограничение имеет реальный физический смысл для поля излучения.

Здесь использованы обозначения работы [1]. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (7), (8) представляет собой строгое решение задачи дифракции поля точечного заряда на ленточной решетке.

Проведем приближенное решение рассматриваемой системы, когда  $|x| < \frac{1}{2}$  (длинноволновое приближение). При этом будем исследовать спектральную плотность дифракционного поля, частота которого удовлетворяет заданному требованию. Ограничение  $|x| < \frac{1}{2}$  не является существенным, так как при малых периодах решетки можно исследовать Фурье-компоненты поля достаточно большой частоты и при этом произвести исследование в аналитическом виде.

При  $|x| < \frac{1}{2}$  и  $m + m_0 \neq 0$  все слагаемые в суммах (5) и (6), кроме слагаемых, содержащих  $e_x^{\pm}(-m_0)$  и  $h_x^{\pm}(-m_0)$ , будут экспоненциально убывающими, поэтому электромагнитное поле пространственной гармоники с номером  $-m_0$  и определит поле дифракционного излучения.

В этом случае можно показать, что, проводя решение системы (7), (8) методом последовательных приближений и ограничиваясь первым приближением, получаем следующие выражения для амплитуд поля  $-m_0$ -й пространственной гармоники дифракционного поля:

$$e_x^+(-m_0) = -e_x^0 e^{-\rho a} \frac{D^{m_0}(\mu, u)}{G(\mu, u)}; \quad (9)$$

$$h_x^+(-m_0) = -(-1)^{m_0} h_x^0 e^{-\rho a} \frac{D^{m_0}(\mu, \hat{u})}{G(\mu, \hat{u})}, \quad (10)$$

где

$$D^{m_0}(\mu, u) = \mu \frac{|m_0|}{m_0} [P_\mu(u) P_{m_0}(u) - P_{-\mu}(u) P_{m_0-1}(u)] + 2(m_0 + \mu) P_{-\mu}(u) \delta_0^{m_0}; \quad (11)$$

$$G(\mu, u) = \mu [P_\mu(u) + P_{-\mu}(u)] + i \sqrt{x^2 - x_1^2 - \mu^2} [P_\mu(u) - P_{-\mu}(u)],$$

а формулы для  $D(\mu, \hat{u})$  и  $G(\mu, \hat{u})$  имеют тот же вид, что и (11), только аргументом  $u$  полиномов и функций Лежандра является  $\hat{u} = \cos \hat{\delta}$ .

Теперь можно записать поле дифракционного излучения согласно (3) и (4). Вводя для удобства  $x' = \frac{2\pi}{l} x$ ,  $y' = \frac{2\pi}{l} y$ ,  $z' = \frac{2\pi}{l} z$ ,  $v' = \frac{v}{2\pi}$  и производя замену переменной интегрирования, получим в системе координат  $XYZ$  для спектральной плотности излучения выражения

$$E_{\omega x}(X, Y, Z) = -\frac{2\pi}{l \sin \delta} \sum_{m_0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e_x^+(-m_0) e^{i x_1 Y' + i \mu_1 X'} \times \\ \times \exp [i \sqrt{x^2 - x_1^2 - \mu_1^2} Z] d\mu; \quad (12)$$

$$H_{\omega x}(X, Y, Z) = -\frac{2\pi}{l \sin \delta} \sum_{m_0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_x^+(-m_0) e^{i x_1 Y' + i \mu_1 X'} \times \\ \times \exp [i \sqrt{x^2 - x_1^2 - \mu_1^2} Z] d\mu, \quad (13)$$

где введены

$$x_1 = \frac{x}{\beta_0} - m_0 \cos \delta; \\ \mu_1 = \frac{1}{\sin \delta} [x_1 \cos \delta - \mu]; \quad \beta_0 = \frac{v}{c}.$$

Спектральные плотности электромагнитного поля дифракционного излучения получаются в виде суммы определенных интегралов.

Функция  $G(\mu, u) \neq 0$  при  $|\mu| \leq \frac{1}{2}$  и  $\mu \neq 0$ , а при  $\mu = 0$  отношение  $\frac{D^{m_0}(\mu, u)}{G(\mu, u)}$  стремится к конечному пределу, поэтому подынтегральные функции ограничены и каждый из этих интегралов является ограниченной функцией. Перейдем к цилиндрической системе координат

$$X' = R' \sin \varphi, \quad Z' = R' \cos \varphi.$$

Полагая  $R'$  бóльшим параметром, можно оценить определенные интегралы, входящие в сумму, методом стационарной фазы.

Главные члены асимптотического разложения по степеням  $\frac{1}{R'}$  имеют вид

$$E_{\omega x}(Y', R') = A_{m_0} (R')^{-\frac{1}{2}} [(x \beta_0 - x_1) \sin \delta - \sqrt{x^2 - x_1^2} \cos \delta \sin \varphi] \times \\ \times \cos \varphi \exp [i \sqrt{x^2 - x_1^2} R' + i x_1 Y']; \quad (14)$$

$$A_{m_0} = \frac{i \rho_0 \sqrt{2\pi}}{\rho v l} \cdot \frac{D(\mu, u)}{G(\mu, u)} (x^2 - x_1^2)^{\frac{1}{4}} e^{-\rho a - i \frac{\pi}{4}};$$

$$H_{\omega x}(Y, R) = B (R')^{-\frac{1}{2}} \cos \delta \cos \varphi \exp [i \sqrt{x^2 - x_1^2} R' + i x_1 Y'];$$

$$B = -(-1)^{m_0} \frac{\rho_0 \sqrt{2\pi}}{c l} \cdot \frac{D(\mu, \hat{u})}{G(\mu, \hat{u})} (x^2 - x_1^2)^{\frac{1}{4}} e^{-\rho a - i \frac{\pi}{4}}. \quad (15)$$

Знак суммы опущен, так как условие существования излучения  $\left| \frac{x}{\beta_0} - m_0 \cos \delta \right| < x$  при заданных  $\delta$  и  $\beta_0$  и для заданной частоты  $x$  может быть удовлетворено только при одном определенном значении  $m_0$ .

Таким образом, поле дифракционного излучения точечной заряженной частицы в дальней зоне ( $R' = \frac{2\pi}{l} R \gg 1$ ) представляет собой цилиндрическую волну с осью симметрии, совпадающей с осью  $OY$  и модулированной вдоль этой оси по гармоническому закону.

С увеличением расстояния от оси  $OY$  амплитуда поля убывает пропорционально  $R^{-\frac{1}{2}}$ .

Из условия существования излучения  $\left| \frac{x}{\beta_0} - m_0 \cos \delta \right| < x$  следует, что при  $m_0 = 0$  излучение отсутствует. Области существования излучения находим из равенства

$$x = \left| \frac{x}{\beta_0} - m_0 \cos \delta \right|$$



и графически иллюстрируем диаграммой Бриллюэна (рис. 2). Из диаграммы видно, что при заданной скорости движения заряда  $\beta_0$  излучаются только те частоты, которые на диаграмме лежат на прямой, составляющей с осью  $\frac{x}{\beta_0}$  угол  $\Delta$ , такой, что

$\text{tg } \Delta = \beta_0$ , и попадают в незаштрихованные области — зоны излучения.

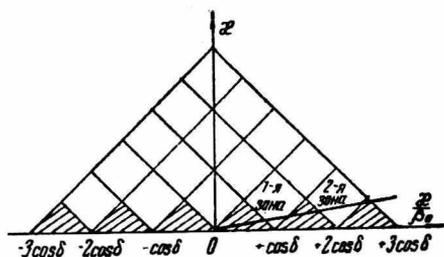


Рис. 2.

решеткой изменяется положение каждой зоны на диаграмме, что дает возможность осуществить механическую перестройку частоты дифракционного излучения. Работать выгодно в первой зоне, так как при этом излучение возникает с максимальной возможной амплитудой.

Направление волнового вектора излучающейся гармоники заданной частоты  $x$  составляет с осью  $oz$  угол  $\psi$ , определяемый соотношением

$$\text{tg } \psi = x_i [x^2 - x_i^2]^{-1/2}.$$

Излучающаяся гармоника с частотой  $x = \beta_0 m_0 \cos \delta$  распространяется по нормали к решетке. Излучение под углами  $\psi = \pm 90^\circ$  отсутствует.

Диаграмма направленности проекции  $\vec{E}_\omega$  на плоскость  $xoy$  для точек, расположенных на окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости решетки, в дальней зоне для случая  $\delta = 0$  имеет вид, представленный на рис. 3. В каждой точке на окружности рассматривается только Фурье-компонента поля излучения, волновой вектор направлен в эту же точку. Диаграмма построена на значениях  $\beta_0 = 0,2$ ,  $m_0 = 1$ ,  $z' = 2\pi 100$ ,  $\rho' = 2\pi 20$ .

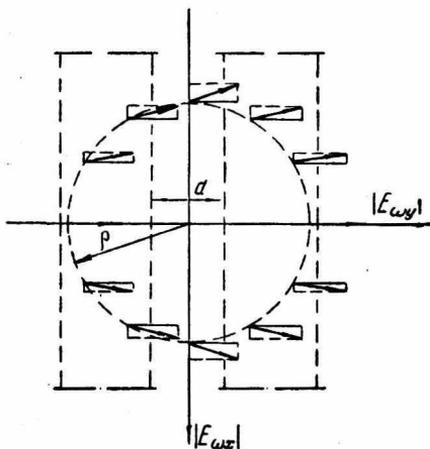


Рис. 3.

Из диаграммы видно, что направление  $\vec{E}_\omega$  поля излучения точечного заряда существенно отличается от аналогичной в случае движения заряженной нити над решеткой параллельно ее лентам, для которой вектор электрического поля излучения имеет одну составляющую  $E_{y\omega}$ . Для трехмерной задачи дифракционного излучения точечного заряда, движущегося перпендикулярно лентам, направление  $\vec{E}_\omega$  совпадает с направлением  $\vec{E}_\omega$  поля излучения заряженной нити только при  $x = 0$ . Максимальное отклонение от оси  $oy$  наблюдается в точках, для которых  $y = 0$ . Если для перпендикулярного движения заряда относительно лент  $E_{\omega x}$ , по порядку величины, меньше  $E_{\omega y}$ , то в случае движения под углом к лентам эти две величины одного порядка и диаграмма направлений вектора  $\vec{E}_\omega$  изменяется в сторону увеличения отклонения  $\vec{E}_\omega$  от оси  $oy$  в точках наблюдения, для которых  $x \neq 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб. Возбуждение кольцевого волновода диполем. Сб. «Радиотехника», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.
2. Е. Н. Подольский. Дифракция электромагнитной волны, падающей под произвольным углом на плоскую металлическую решетку. Ученые записки механико-математического факультета ХГУ и Харьковского математического общества, серия 4, т. 30, 1964.
3. Б. М. Болотовский, В. Г. Воскресенский. Дифракционное излучение. «Успехи физических наук», т. 88, вып. 2, 1966.
4. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.