

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ, ПЕРЕСЕКАЮЩИМ ДИФРАКЦИОННУЮ РЕШЕТКУ

Ю. А. Прокопчук

Х а р ь к о в

Взаимодействие электронных пучков с периодическими системами рассматривается в целом ряде работ [1]. Это объясняется использованием указанного взаимодействия в генераторах коротких электромагнитных волн [2] (пучок электронов движется параллельно решетке), [3] (пучок электронов движется под некоторым углом к плоскости решетки), линейных ускорителях и других электронных приборах. Взаимодействие электронных пучков используется также при определении характеристик частицы (скорости, заряда, траектории) по свойствам излученного ею поля.

В большинстве теоретических работ рассматривается излучение электронных пучков, движущихся параллельно периодическим системам. В то же время нам известна лишь одна статья [4], в которой теоретически исследуется излучение линейного источника, перемещающегося перпендикулярно решетке из идеально проводящих полуплоскостей.

В настоящей статье дается строгое решение задачи об излучении плоского монохроматического электронного пучка, пересекающего под произвольным углом α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) бесконечно тонкую идеально проводящую ленточную решетку (рис. 1), причем пучок может проходить через щель (при этом возникает дифракционное излучение [5]) или через ленту (переходное [6] и дифракционное излучение).

Рассмотрим движение заряженного пучка с переменной составляющей плотности

$$\rho = \rho_0 \delta(z') e^{i(ky' - \omega t)} \quad (1)$$

и постоянной скоростью $\vec{v} = \vec{e}_{y'} \beta c$. Используем здесь две системы координат XYZ , связанную с решеткой, и $X'Y'Z'$, связанную с пучком, и введем следующие обозначения: ρ_0 — амплитуда, ω — частота модуляции, c — скорость света; $k = \frac{\omega}{v}$; $\vec{e}_{y'}$ — орт вдоль оси $O'Y'$. На рисунке показано сечение решетки в плоскости $x = \text{const}$.

Полное магнитное поле представим в виде

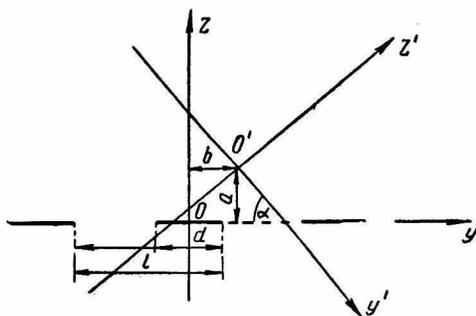
$$\vec{H} = \vec{e}_x H_{x0} + \begin{cases} \vec{e}_x H_{x1}, & z > 0; \\ \vec{e}_x H_{x2}, & z < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$H_{x0} = -i2\beta\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{q^2 + \tau^2} e^{i(\tau z' + ky')} d\tau; \quad (3)$$

$$H_{x1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_n(\tau) \\ b_n(\tau) \end{Bmatrix} \exp i \left(\tau y \sin \alpha + \frac{2\pi n}{l} y + h_n |z| \right) d\tau \exp iky'(y, 0); \quad (4)$$

$$h_n = \sqrt{k^2\beta^2 - \left(\tau \sin \alpha + k \cos \alpha + \frac{2\pi n}{l} \right)^2}; \quad y'(y, 0) = (y - b) \cos \alpha + a \sin \alpha; \quad (4')$$



$a_n(\tau)$ и $b_n(\tau)$ неизвестные коэффициенты Фурье, \vec{e}_x — орт вдоль оси Ox (в формуле (4) верхняя буква соответствует индексу 1, а нижняя индексу 2; множитель $e^{-i\omega t}$ всюду для краткости опускаем). В (4') ветвь корня выбирается таким образом, чтобы $\text{Im } h_n > 0$, а если $\text{Im } h_n = 0$, $\text{Re } h_n > 0$.

Электрическое поле запишем в такой форме:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{1,2}, \quad (5)$$

где

$$\vec{E}_0 = -\frac{2i\rho_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{e}_y (q^2 \cos \alpha + k\tau \sin \alpha) - \vec{e}_z (q^2 \sin \alpha - k\tau \cos \alpha)}{q^2 + \tau^2} e^{i(\tau z' + ky')} d\tau; \quad (6)$$

\vec{e}_y и \vec{e}_z — орты соответственно вдоль осей Oy и Oz .

Векторы $E_{1,2}$ находим по формуле

$$\vec{E}_{1,2} = \frac{i}{k\beta} \text{rot } \vec{H}_{1,2} \quad (7)$$

с учетом (4).

Поля $\vec{E}_{1,2}$, $\vec{H}_{1,2}$ удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла, а поля \vec{E}_0 , \vec{H}_0 — неоднородным уравнениям, у которых заряд дается формулой (1), а ток формулой

$$\vec{j} = \vec{v}\rho = \vec{v}\rho_0 \delta(z') e^{i(ky' - \omega t)}.$$

Подчинив электромагнитные поля (2)—(7) точным граничным условиям (равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля на ленте и непрерывность тангенциальных составляющих всего электромагнитного поля на щелях), получим следующие равенства:

$$a_n(\tau) = -b_n(\tau); \quad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) \exp i \frac{2\pi n}{l} y = 0, \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}; \quad (9)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) h_n \exp i \frac{2\pi n}{l} y = f(\tau), \quad |y| < \frac{d}{2}, \quad (10)$$

где

$$f(\tau) = -\frac{2i\rho_0\beta (q^2 \cos \alpha + k\tau \sin \alpha)}{q^2 + \tau^2} e^{-i\tau(b \sin \alpha + a \cos \alpha)}. \quad (11)$$

С помощью метода, предложенного в работе [7], можно показать, что уравнения (9), (10) эквивалентны бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_0(j, \xi) [1 + (\xi + i\sqrt{x^2 - \xi^2}) V_{[\xi]}^0] + 2x_{-1} R_{[\xi]} + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{\infty} x_p \frac{|p|}{p} \varepsilon_p V_{[\xi]}^p = \\ = \frac{il}{2\pi} f(\tau) V_{[\xi]}^j; \quad (12)$$

$$a_0(j, \xi) [\xi + i\sqrt{x^2 - \xi^2}] V_m^0 + x_{-1} P_m - x_m + \\ + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{\infty} x_p \frac{|p|}{p} \varepsilon_p V_m^p = \frac{il}{2\pi} f(\tau) V_m^j, \quad (m = 0, 1, \pm 2, \dots) \quad (13)$$

где

$$(\tau \sin \alpha + k \cos \alpha) \frac{l}{2\pi} = j + \xi; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad -\frac{1}{2} < \xi \leq \frac{1}{2};$$

$$p = j + n;$$

$$a_n(\tau) = a_{p-j}(\tau) = a_p(j, \xi); \quad x_p = (p + \xi) a_p(j, \xi); \quad x = \frac{k\beta l}{2\pi}; \quad \vartheta = \frac{\pi d}{l}; \quad (14)$$

$$\varepsilon_p = 1 + i \sqrt{\frac{x^2}{(p + \xi)^2} - 1};$$

$$V_{[\xi]}^p = \frac{\pi}{2 \sin \xi \pi} \cdot \frac{\xi - 1}{p + \xi} (P_{-\xi} P_{p+1} - P_{1-\xi} P_p) - \frac{V_0^p}{\xi}; \quad R_{[\xi]} = \frac{\pi P_{-\xi}}{2 \sin \xi \pi} - \frac{1}{2\xi};$$

P_p и $P_{n+\xi}$ соответственно полиномы и функции Лежандра первого рода от аргумента $u = \cos \vartheta$; величины V_m^p приведены в [7].

Формулы (4), (7), (12)—(14) полностью определяют решение поставленной задачи — нахождение полей излучения $\vec{H}_{1,2}$, $\vec{E}_{1,2}$.

Эти формулы дают правильные предельные переходы при стремлении ширины лент d и щелей к нулю, причем последний случай соответствует чисто переходному излучению. Если $\alpha = 0$, выражения для полей значительно упрощаются и представляют собой ряды Фурье. Это случай исследован в работе [8], поэтому мы на нем не будем останавливаться.

Из (4), (4'), (7) следует, что условие излучения n -й гармоники имеет вид

$$k^2\beta^2 > \left(\tau \sin \alpha + k \cos \alpha + \frac{2\pi n}{l} \right)^2.$$

Следовательно, при $\alpha > 0$ для любой гармоники существует непрерывный спектр значений τ , при котором она излучается — это является отличительной особенностью переходного и некоторых видов дифракционного излучений. В то же время при $\alpha = 0$ распространяющимися могут быть только отрицательные гармоники [8].

Выражения для полей излучения могут быть оценены в дальней зоне с помощью метода перевала. Введем для этого в плоскости $X = \text{const}$ полярную систему координат с центром в точке пересечения пучком оси OY по формулам

$$r \cos \psi = y - y_0; \quad r \sin \psi = z; \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad (15)$$

где $y_0 = b + a \operatorname{ctg} \alpha$ есть координата линии пересечения пучком плоскости решетки. Тогда при выполнении неравенств

$$\frac{\omega}{c} r \gg 1; \quad (16)$$

$$\left| \sqrt{\frac{\pi r}{\kappa l \sin^2 \psi}} \left| \kappa \left(\frac{\cos \alpha}{\beta} - \cos \psi \right) - j \pm i \frac{\kappa \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \sin \alpha \right| \right| \gg 1, \quad (\text{для всех } j) \quad (17)$$

получим

$$H_x \approx \operatorname{sign} z \cdot 2 \sqrt{2\pi\rho_0} \kappa^2 \beta^2 \sin \alpha \frac{|\sin \psi|}{\Delta(\xi_0)} \frac{\exp i \left\{ \frac{\omega}{c} r + \rho_0 \bar{y}_0 + \frac{\kappa a}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{4} \right\}}{\sqrt{\frac{\omega}{c} r}} \times \\ \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(j + \xi_0 - \kappa \beta \cos \alpha) \Delta'_{\rho_0}(\xi_0)}{\kappa^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \alpha + (j \beta + \xi_0 \beta - \kappa \cos \alpha)^2} e^{-i j \bar{y}_0}, \quad (18)$$

где $\Delta(\xi_0)$ — определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных $(a_p(j, \xi))$ в системе (12), (13) с $\xi = \xi_0$;

$\Delta'_{\rho_0}(\xi_0)$ — определитель, полученный из $\Delta(\xi_0)$, если в последнем столбце, составленный из коэффициентов при $a_{\rho_0}(j, \xi_0)$, заменить на столбец, составленный из величин $V_{[j, \xi_0]}^i$, V_m^i , ($m = 0, 1, \pm 2, \dots$); $\rho_0 + \xi_0 = \kappa \cos \psi$ (см. также (14)); $\bar{y}_0 = \frac{2\pi y_0}{l}$.

При $\kappa \leq 0,3$ формулу (18) с высокой степенью точности можем переписать в явном виде

$$H_x = \operatorname{sign} z \cdot 2 \sqrt{2\pi\rho_0} \kappa^2 \beta^2 \sin \alpha |\sin \psi| \frac{\cos \psi}{g(\xi_0)} \frac{\exp i \left(\frac{\omega}{c} r + \frac{\kappa a}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\frac{\omega}{c} r}} \times \quad (19)$$

$$\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(j + \kappa \cos \psi - \kappa \beta \cos \alpha) (P_{\xi_0} P_j - P_{-\xi_0} P_{j-1})}{(j + \kappa \cos \psi) [\kappa^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \alpha + (j \beta + \kappa \beta \cos \psi - \kappa \cos \alpha)^2]} e^{-i j \bar{y}_0},$$

где

$$g(\xi_0) = \xi_0 (P_{\xi_0} + P_{-\xi_0}) + i \sqrt{\kappa^2 - \xi_0^2} (P_{\xi_0} - P_{-\xi_0}). \quad (19')$$

Используя (34) из [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n - P_{n-1}}{n} \cos ny = \begin{cases} -\ln \frac{1+u}{2}, & \vartheta < |y| < \pi; \\ -\ln \frac{1+u}{2} - 2 \int_y^{\vartheta} \frac{\sin \frac{\delta}{2} d\delta}{\sqrt{2(\cos \delta - u)}}, & |y| < \vartheta; \end{cases}$$

при

$$\begin{aligned} x |\cos \psi - \beta \cos \alpha| &\ll 1; & x \left| \cos \psi - \frac{\cos \alpha}{\beta} \right| &\ll 1; \\ \frac{x^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \alpha}{\beta^2} &\ll 1 \end{aligned} \quad (20)$$

из равенства (19) получим

$$\begin{aligned} H_x = \text{sign } z 2 \sqrt{2\pi} \rho_0 \frac{\sin \alpha |\sin \psi|}{1 + ix |\sin \psi| \ln \frac{1+u}{2}} \cdot \frac{\exp i \left(\frac{\omega}{c} r + \frac{ka}{\sin \alpha} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\frac{\omega}{c} r}} \times \\ \times \left\{ \frac{x \beta^2 (\cos \psi - \beta \cos \alpha) \ln \frac{1+u}{2}}{(1 - \beta^2) \sin^2 \alpha + (\beta \cos \psi - \cos \alpha)^2} - ix^2 T(u, \bar{y}_0) \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$T(u, \bar{y}_0) = \begin{cases} \text{sign } \bar{y}_0 (\pi - |\bar{y}_0|) \ln \frac{1+u}{2}; & \vartheta < |\bar{y}_0| < \pi; \\ -2\bar{y}_0 \ln \left(\sqrt{\cos \bar{y}_0 - u} + \sqrt{1 + \cos \bar{y}_0} \right) - \\ - 2 \int_0^{\bar{y}_0} \frac{\varphi \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - u)}} + \bar{y}_0 \ln 2, & |\bar{y}_0| < \vartheta. \end{cases} \quad (22)$$

Средний за период поток вектора Умова-Пойтинга через элемент поверхности $rd\psi$ (единичный по длине вдоль оси OX) при больших значениях r равен

$$\bar{S}_r r d\psi = \mathcal{W}(\psi, \omega) d\psi = \frac{cr}{8\pi} |H_x(r, \psi, \omega)|^2 d\psi. \quad (23)$$

Согласно (21), (22) интенсивность излучения

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\psi, \omega) = \frac{\rho_0^2 c^2 x^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \psi}{\omega \left(1 + x^2 \sin^2 \psi \ln^2 \frac{1+u}{2} \right)} \left\{ \frac{\beta^4 (\cos \psi - \beta \cos \alpha)^2 \ln^2 \frac{1+u}{2}}{[(1 - \beta^2) \sin^2 \alpha + (\beta \cos \psi - \cos \alpha)^2]^2} + \right. \\ \left. + x^2 T^2(u, \bar{y}_0) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Проанализируем полученные равенства. Из (18), (19) и (21) видно, что в дальней зоне поле излучения имеет характер цилиндрической волны, расходящейся от линии пересечения пучком плоскости решетки. При $\alpha \rightarrow 0$ или π интенсивность излучения (23), (18), (24) стремится к нулю (если при $\alpha = 0$ выполняются условия излучения [8], то при этом необходимо учитывать полюса в (4), (7), которые и определяют излучение в этом случае). При $\psi \rightarrow 0$ или π излучение (19), (24) также

стремится к нулю аналогично переходному излучению на диэлектрическом полупространстве в отличие от переходного излучения на металлическом экране [6]. Согласно (24) и (19), излучение в общем случае не равно нулю при $\cos \psi = \beta \cos \alpha$ в отличие от переходного излучения на металлическом экране.

При прохождении пучка через середину щели и ленты интенсивность излучения одинакова [см. (24)], при этом $W(\psi, \omega)$ достигает минимума по параметру \bar{y}_0 и описывается только одним слагаемым. Зависимость $W(\psi, \omega)$ от \bar{y}_0 определяется величиной $T^2(u, \bar{y}_0)$, которая при прохождении пучка через щель пропорциональна квадрату расстояния линии пересечения его с плоскостью решетки от середины щели и достигает своего максимального значения при $\bar{y}_0 = \vartheta$.

При пересечении пучком ленты интенсивность излучения имеет максимумы при значениях \bar{y}_0 , удовлетворяющих равенству

$$\cos \bar{y}_0 = \frac{u^2 + 6u + 1}{8}.$$

Когда электроны переходят из области щели в область ленты, и наоборот, $W(\psi, \omega, \bar{y}_0)$ остается непрерывной относительно \bar{y}_0 , что соответствует нашим физическим представлениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский. Излучение заряженных частиц в периодических структурах. УФН, 94, 3, 337, 1968.
2. Ф. С. Русин, Г. Д. Богомолов. Оротрон как генератор миллиметрового диапазона. Сб. «Электроника больших мощностей», вып. 5. Изд-во «Наука», 1968.
3. V. Sells, F. C. Choо, E. F. Brannen, H. R. Froelich. Генерирование миллиметровых волн с помощью микротрона с прямолинейными промежутками. Proc. IEEE, v. 54, № 4, 1966.
4. Ю. М. Айвазян, Д. М. Седракян. Излучение линейного источника при влете и вылете из системы идеально проводящих полуплоскостей. Изв. АН Арм. ССР, 18(1), 117, 1965.
5. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский. Дифракционное излучение. УФН, 88, 2, 209, 1966.
6. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко. Теория излучения заряда, проходящего через электрически неоднородную среду. УФН, 86, 2, 189, 1965.
7. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, 32, 4, 381, 1962.
8. С. С. Третьякова, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. Излучение электромагнитных волн электронным пучком, движущимся над дифракционной решеткой. «Радиотехника и электроника» 10, 7, 1233, 1965.
9. В. В. Щербак. Поля на ленте и щели в задаче дифракции волн на ленточных неоднородностях. Сб. «Радиотехника», вып. 10. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
10. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Изд-во «Наука», 1964.