О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОНА С ПОЛЕМ БЕССЕТОЧНОГО РЕЗОНАТОРА*

В. Д. Еремка, Л. А. Поспелов

Харьков

В клистронах часто используются резонаторы с бессеточными зазорами. В таких конструкциях высокочастотное поле пространства взаимодействия, как правило, сильно изменяется и в направлении движения потока, и в поперечном направлении. Наличие продольной зависимости СВЧ-поля обусловливает более быстрый спад коэффициента взаимодействия с ростом угла пролета, чем в случае зазора, ограниченного сетками. На это явление было ранее указано в работе одного из авторов [1] применительно к полю вида (4). Например, специфичное изменение конструкции резонатора в приборе, описанном в работе [2], повлекло за собой значительное увеличение ускоряющего напряжения. Отсюда следует необходимость более четкого представления о влиянии формы поля пространства взаимодействия на параметры всего прибора.

В настоящей статье анализируется эффект взаимодействия электрона с полем резонатора для некоторых распределений амплитуды высокочастотного поля в зазоре резонатора.

---

* Подобные вопросы рассматривались также в работах Д. М. Петрова, К. Г. Симонова, Ю. А. Яблокова, В. П. Панова.

Величина коэффициента взаимодействия M показывает, во сколько раз энергия, передаваемая СВЧ-полем потоку, уменьшается вследствие того, что это взаимодействие происходит за конечный промежуток времени (при мгновенном взаимодействии $M \equiv 1$). Если считать взаимодействие электрона с полем резонатора слабым (к. п. д. прибора $\eta \ll 1$), можно записать общее выражение аналогично [3]

$$M = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz E(z) e^{i\omega \frac{z}{v_0}}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz E(z)}, \tag{1}$$

где $E(z) e^{i\omega \frac{z}{v_0}}$ — высокочастотное поле резонатора;

ω — угловая частота;

z — координата вдоль направления движения электрона;

v_0 — невозмущенная скорость электрона.

Из соотношения (1) можно заключить, что величина M существенно зависит от вида функции $E = E(z)$. Эта зависимость тем сильнее, чем больше угол пролета $\varphi = \omega \frac{z}{v_0}$. Действительно, для зазора шириной d_0 с сетками [3]

$$E(z) = \begin{cases} E_0 & |z| \leqslant \frac{d_0}{2}; \\ 0 & |z| > \frac{d_0}{2}; \end{cases} \tag{2}$$

$$M = \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}}, \tag{3}$$

где $\varphi_0 = \omega \frac{d_0}{v_0}$.

Для распределения поля в зазоре

$$E(z) = E_0 e^{-\left(\frac{z}{d}\right)^2} \tag{4}$$

коэффициент взаимодействия [1]

$$M = e^{-\left(\frac{\varphi_0}{4}\right)^2} \quad \text{(кривая 2, рис. 4).} \tag{5}$$

Качественное и количественное отличие зависимостей (3) и (5) очевидно. Это означает, что при конкретных вычислениях величины M необходимо достаточно строгое определение зависимости $E = E(z)$, соответствующее реальной конструкции резонатора. Однако практически невозможно найти точное распределение поля $E(z)$ и приходится ограничиваться некоторым модельным приближением. В ряде случаев удобно использовать, например, электростатическое приближение. Тогда вид распределения потенциала в зазоре резонатора может быть найден измерением на электролитической ванне. Особенно удобно электростатическое приближение в случае осевой симметрии задачи, когда поле в любой точке пространства $E(r, z)$ определяется полем вдоль оси симметрии $E(0, z)$. Эту зависимость удобно записать по Шерцеру [4]

$$E(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} d\varphi \, E_0 (z + ir \sin \varphi). \tag{6}$$

Тогда переходом к комплексным переменным и заменой переменных в выражении (1), в которое в качестве $E(z)$ подставлено соотношение (6), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dzE(r,\ z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dzE_0(z) \equiv U; \tag{7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\, E(z)\, e^{i\omega\frac{z}{v_0}} = UI_0\left(\frac{\omega r}{v_0}\right) M_0\left(\frac{\omega d}{v_0}\right), \tag{8}$$

где d — размер пространства, занятого полем;

$I_0\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода;

M_0 — коэффициент взаимодействия электрона, движущегося по оси;

$$M = M_0\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) I_0\left(\frac{\omega r}{v_0}\right). \tag{9}$$

При выводе соотношений (7) и (8) предполагалось, что поле $E(z)$ спадает достаточно быстро с ростом z, оставаясь симметричным относительно плоскости $z = 0$. Из выражения (7) следует, что интеграл в знаменателе формулы (1) не зависит от радиуса и представляет собой разность потенциалов между «электродами» зазора. Из формулы (9) видим, что для симметричного зазора зависимость коэффициента взаимодействия от радиуса является универсальной, т. е. не меняется с изменением формы «электродов» зазора. Поэтому и средний по сечению потока коэффициент взаимодействия будет иметь вид, аналогичный соотношению (8) при $0 \leqslant r \leqslant a$:

$$\overline{M} \equiv \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a drrM(r) = \frac{I_1(\varphi_a)}{\varphi_a} M_0(\varphi_d), \tag{10}$$

где $I_1(\varphi_a)$ — модифицированная функция Бесселя $\left(\varphi_d = \frac{\omega d}{v_0}\right)$.

Таким образом, для симметричного зазора отыскание коэффициента взаимодействия для любого электрона сводится к вычислению взаимодействия осевого электрона. Вид поля при $r \neq 0$ может при этом качественно отличаться от зависимости $E_0 = E(z)$ при $r = 0$. Действительно, если, например, $E_0(z)$ задано соотношением (4), то

$$E(z) = E(r,\ z) = E_0(0)\, e^{-\left(\frac{z}{d}\right)^2} \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}}\, e^{\left(\frac{r}{d}\right)\xi} \cos 2\frac{r}{d}\frac{z}{d}\,\xi \tag{11}$$

(ξ — безразмерная переменная)

при $\frac{r}{d} \approx 1$ качественно отличается от функции (4). Так же сильно будет отличаться $E(z)$ при $\frac{r}{d} \approx 1$ и для других зависимостей $E(z)$. Из общего выражения (11) следует зависимость напряженности поля при $z = 0$ от радиуса:

$$\frac{E(0,\ \rho)}{E(0,\ 0)} = e^{-\frac{\rho^2}{2}} I_0\left(\frac{\rho}{2}\right), \tag{12}$$

где $\rho = \frac{r}{d}$ — безразмерный радиус.

График этой зависимости изображен на рис. 1. Если считать, что зависимость $E(z)$ при любом r близка к функции (4), можно найти эффективную ширину этой кривой $d_{эфф}(r)$, равную размерам пространства, занятого высокочастотным полем. Для нахождения $d_{эфф}(r)$ предполагаем, что площадь под истинной кривой и под аппроксимирующей равны и обе кривые совпадают при $z = 0$. Это позволяет записать равенство так:

$$\frac{d_{эфф}(r)}{d(0)} = \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{I_0\left(\frac{\rho}{2}\right)}. \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13), а также рис. 1 следует, что напряженность поля в середине зазора резко убывает при приближении к центру зазора ($r = 0$), а эффективная ширина пространства, занятого полем в зазоре, при этом возрастает.

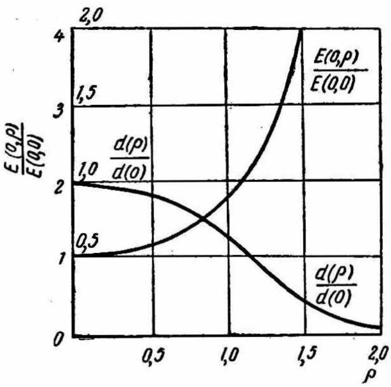

Рис. 1.

Далее получим коэффициент взаимодействия для двух предельных случаев реального зазора резонатора: а) зазор между трубками одинакового диаметра (рис. 2); б) зазор между двумя одинаковыми диафрагмами с круглыми отверстиями (рис. 3). Распределения потенциала в обоих случаях сняты на электролитической ванне. Изменения напряженности поля построены графически.

В первом случае поле вдоль оси трубки может быть записано в виде [5]

$$E_0(z) = \frac{1}{\pi} U \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin kz}{k} \cdot \frac{1}{J_0(ikr_0)} dk, \tag{14}$$

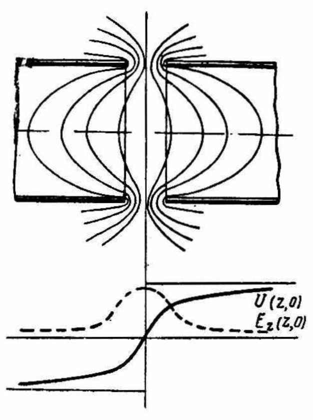

Рис. 2.

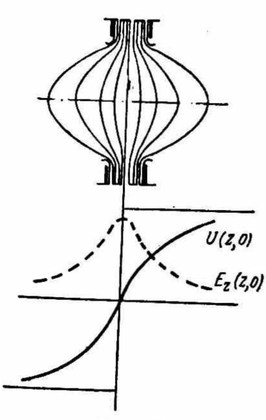

Рис. 3.

где r_0 — радиус бесконечно тонкой трубки;

$$U = U_2 - U_1;$$

k — произвольная постоянная, которая при известных условиях может принимать любые значения.

Для приведенного распределения поля коэффициент взаимодействия имеет вид (см. приложение 1)

$$M_0(\varphi) = \frac{1}{J_0\left(i\varphi_0 \frac{r_0}{d}\right)}, \tag{15}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка первого рода.

Для случая двух диафрагм с одинаковыми круглыми отверстиями радиуса a_0 и расстоянием между ними d распределение поля вдоль оси, согласно [6]:

$$E(z) = d\,\frac{1 - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\zeta - \alpha}{1 + (\zeta - \alpha)^2} + \operatorname{arctg}(\zeta - \alpha)\right]}{\alpha + \frac{2}{\pi}(1 + \alpha \operatorname{arctg} \alpha)}, \tag{16}$$

где $\alpha = \frac{a_0}{d}$; $\zeta = \frac{z}{d}$.

Для такого распределения поля коэффициент электронного взаимодействия

$$M = \frac{1}{E_{z=0}} \int_0^\infty d\zeta \left\{1 - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\xi - \alpha}{1 + (\zeta - \alpha)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{arctg}(\zeta - \alpha)\right]\right\} \cos\frac{\varphi b}{-}, \tag{17}$$

где

$$E_{z=0} = \frac{1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} + \operatorname{arctg} \alpha\right)}{1 + \frac{2}{\pi}(1 + \alpha \operatorname{arctg} \alpha)};$$

$$\varphi_b = \varphi_0 \alpha.$$

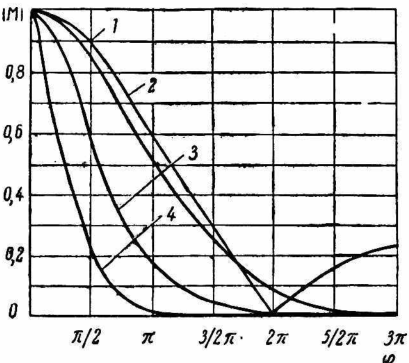

Рис. 4.

Результаты вычисления коэффициента взаимодействия по формулам (15) и (17) с помощью ЭЦВМ для случая $a_0 = d$ и различных углов пролета графически представлены на рис. 4 (кривая *3* и *4* соответственно). Ход кривых показывает, что для случаев распределения поля в бессеточном зазоре, близких к реальным, коэффициент взаимодействия при увеличении угла пролета уменьшается значительно быстрее, чем в случае зазора, затянутого сетками (кривая *1*).

Рассмотренные симметричные распределения полей соответствуют симметричным резонаторам, которые на практике встречаются реже асимметричных. Поэтому целесообразно обобщить полученные результаты и на случай несимметричных резонаторов. Простейшую оценку для коэффициента взаимодействия электрона с полем несимметричного зазора можно получить из приведенных выше соотношений. Для этого необходимо учесть, что если характерный размер поля d_1 при $z < 0$ и $d_2 > d_1$ при $z > 0$, то соответствующий коэффициент взаимодействия $M(d_1, d_2)$ должен лежать в пределах

$$M(d_1) \geqslant M(d_1, d_2) \geqslant M(d_2), \tag{18}$$

где $M(d_1, d_2)$ — коэффициенты взаимодействия симметричных зазоров с эффективной шириной поля $d_{1,2}$.

Для строгого определения $M(d_1, d_2)$ асимметричного зазора необходимо провести вычисления, аналогичные выводу формул (7) и (8), но следует учесть, что производные от напряженностей поля по координате

z претерпевают скачок в точке $z = 0$. Соответствующий анализ (см. приложение 2) приводит к следующему выражению:

$$M(r, d_1, d_2) = \frac{\left| I_0\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)\left[N_0\left(\frac{\omega d_1}{v_0}\right) + N_0^*\left(\frac{\omega d_2}{v_0}\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \Delta E_0{}^{(2n-1)}(0)\right|}{2N_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \Delta E_0^{(2n-1)}(0)}, \tag{19}$$

где

$$N_0\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) = \int_0^{\infty} d\xi E_0(\xi)\, e^{i\frac{\omega d}{v_0}\xi};$$

d — характерный размер пространства, занятого полем;
$\Delta E^n(0)$ — скачок n-й производной от $E_0 z$ в точке $z = 0$; звездочка означает комплексную сопряженность.

Если же поле вдоль оси имеет вид $E_0 = E_0(z)$, то $E_0^{(2n+1)}(0) = 0$. Тогда соотношение (19) приобретает более простой вид

$$M(r, d_1, d_2) = I_0\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)\frac{\left|N_0\left(\frac{\omega d_1}{v_0}\right) + N_0\left(\frac{\omega d_2}{v_0}\right)\right|}{2N_0(0)} \tag{20}$$

и зависимость коэффициента взаимодействия от радиуса остается той же, что и для симметричного зазора.

Для случая, когда функция $E_0(z)$ задача соотношением (4), в котором d зависит от координаты z следующим образом:

$$d = \begin{cases} d_1, & z \geqslant 0, \\ d_2, & z \leqslant 0, \end{cases} \tag{21}$$

соотношение (20) можно переписать в функциональном виде

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\left\{e^{\rho_1^2\xi^2}\left[I_1(\Phi_1^+) + I_1(\Phi_1^-)\right] + e^{\rho_2^2\xi^2}\left[I_1(\Phi_1^+) + I_2(\Phi_1^-)\right]\right\} \tag{22}$$

$$M_2 = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\left\{e^{\rho_1^2\xi^2}\left[I_2(\Phi_1^+) + I_2(\Phi_1^-)\right] + e^{\rho_2^2\xi^2}\left[I_2(\Phi_2^+) + I_2(\Phi_2^-)\right]\right\}, \tag{23}$$

где $\Phi_{1,2}^{(\pm)} = \varphi_{1,2} \pm 2\rho_{1,2}\xi$; $\rho_{1,2} = \frac{r}{d_{1,2}}$; $\varphi_{1,2} = \frac{\omega d_{1,2}}{v_0}$; $I_1(\Phi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2}$;

$$I_2(\Phi) = \frac{\Phi}{2} e^{-\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2} F\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2\right].$$

Здесь $F\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2\right]$ — вырожденная гипергеометрическая функция с параметрами: $\alpha = \frac{1}{2}$; $\gamma = \frac{3}{2}$.

Приложение 1

Если поле $E_0(z)$ задано выражением

$$E_0(z)=\int_0^\infty dk \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(kz)\, f(k)$$

и $f(k)$ не имеет особенностей, вычисление коэффициента взаимодействия можно провести, пользуясь свойствами δ-функций Дирака. Действительно, двойной интеграл вида

$$I(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i\alpha z}\int_0^\infty dk\cos kz f(z),$$

изменением порядка интегрирования приводится к виду

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^\infty dk f(k)\int_{-\infty}^{+\infty} dz\left\{e^{i(\alpha+k)z}+e^{i(\alpha-k)z}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty dk f(k)\,[\delta(\alpha+k)+\delta(\alpha-k)].$$

Для $\alpha\neq 0$ последнее интегрирование дает

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}f(\alpha),$$

так как $f(-\alpha)\equiv 0$, $\alpha>0$ по определению.
Для $\alpha=0$ необходимо воспользоваться следующей формулой:

$$\int_0^\infty dk f(k)\,\delta(k)=\frac{1}{2}f(0).$$

Для нашего случая это дает выражение (16) для коэффициента взаимодействия.

Приложение 2

Соотношение (6) разложением $E_0(z+ir\sin\varphi)$ в ряд Тейлора по $ir\sin\varphi$ можно представить в виде (7)

$$E=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}E_0^{2n}(z)\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n E_0^{2n}(z).$$

Следовательно, проводя интегрирование по частям в выражении (1), можно получить, например,

$$\int_0^\infty dz E(z)\, e^{i\frac{\omega z}{v_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n I_m^{(+)},$$

где I_m^{+} удовлетворяет рекурентному соотношению

$$I_m^{(+)}=-E_0^{m-1}(0)-\left(i\frac{\omega}{v_0}\right)I_{m-1}^{(+)}.$$

Из этого соотношения следует, что

$$I_m^{(+)}=(-1)^m\left(i\frac{\omega}{v_0}\right)^m I_0^{(+)}+\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\left(i\frac{\omega}{v_0}\right)^n E_0^{m-n-1}(0),$$

где

$$I_0^{(+)}=\int_0^\infty dz\, E_0(z).$$

После этого выражение (1) для коэффициента взаимодействия можно легко представить в виде соотношения (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Поспелов. К теории миллиметрового клистрона. Сб. «Радиотехника», вып. 9. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
2. B. B. Van Iperen, W. Kuypers. Philips Research Reports, vol. 20, № 4, p. 462, (1965).
3. Клистроны. Изд-во «Советское радио», 1952.
4. Е. Брюхе, О. Шерцер. Электронная оптика. Гостехиздат, 1943.
5. К. Шимони. Теоретическая электроника. Изд-во «Мир», 1964.
6. М. В. Кот. К теории полей простейших аксиально-симметричных электростатических линз. «Труды Черновицкого государственного университета, серия физико-математическая», т. 4, № 2, 1952.
7. J. Picht. Einfürung in die Theorie der Elektronenoptik. Leipzig, (1957).