АНАЛИЗ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. А. Третьяков

Киев

При решении конкретных инженерных задач в различных областях радиотехники приходится встречаться с системами, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка вида

$$f(x)\frac{d^2y}{dx} + g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,y = G(x), \tag{1}$$

где $G(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — некоторые непрерывные в фиксированном интервале функции, описывающие заданную систему.

Известно много приближенных методов решения уравнения (1), иногда весьма эффективных в связи с использованием ЭВМ, однако создание достаточно простых методов решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида (1) является весьма важной проблемой, имеющей большое практическое значение [2].

Цель настоящей работы — обоснование метода получения решения уравнения (1) в виде сходящихся знакопеременных рядов по степеням некоторой функции, зависящей от коэффициентов уравнения (1).

Известно [3], что уравнение (1) можно считать в принципе решенным, если найдено хотя бы одно нетривиальное решение однородного уравнения

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,y = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно [3] привести к системе

$$\frac{dy}{dx} = Q(x)\,z;$$

$$\frac{dz}{dx} = R(x)\,y,$$

где

$$Q(x) = \exp\left[-\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right];$$

$$R(x) = -\frac{h(x)}{f(x)}\exp\left[\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right].$$

Теорема 1. *Система* (3) *разрешима в квадратурах, если ее общее решение взять в виде*

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 p(x)\,\mathrm{sh}\,p(x) + C_2 r(x)\,\mathrm{ch}\,r(x);\\ z(x) &= C_3 p(x)\,\mathrm{ch}\,p(x) + C_4 r(x)\,\mathrm{sh}\,r(x), \end{aligned} \tag{4}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — константы, а $p(x)$ и $r(x)$ — *некоторые функции, подлежащие определению.*

Для доказательства подставим решение (4) в систему (3). Тогда получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{sh}\,p\frac{dp}{dx} + p\,\mathrm{ch}\,p\frac{dp}{dx} + \mathrm{ch}\,r\frac{dr}{dx} + r\,\mathrm{sh}\,r\frac{dr}{dx} = Qp\,\mathrm{ch}\,p + Qr\,\mathrm{sh}\,r;\\ &\mathrm{ch}\,p\frac{dp}{dx} + p\,\mathrm{sh}\,p\frac{dp}{dx} + \mathrm{sh}\,r\frac{dr}{dx} + r\,\mathrm{ch}\,r\frac{dr}{dx} = Rp\,\mathrm{sh}\,p + Rr\,\mathrm{ch}\,r, \end{aligned} \tag{5}$$

где $p = p(x)$; $r = r(x)$; $Q = Q(x)$; $R = R(x)$; $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$.

Учитывая, что общее решение (4) для $y(x)$ и $z(x)$ представлено как сумма двух частных линейно независимых решений, систему (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\mathrm{sh}\,p\frac{dp}{dx} + p\,\mathrm{ch}\,p\frac{dp}{dx} = Qp\,\mathrm{ch}\,p;\\ &\mathrm{ch}\,p\frac{dp}{dx} + p\,\mathrm{sh}\,p\frac{dp}{dx} = Rp\,\mathrm{sh}\,p \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}\,r\frac{dr}{dx} + r\,\mathrm{sh}\,r\frac{dr}{dx} = Qr\,\mathrm{sh}\,r;\\ &\mathrm{sh}\,r\frac{dr}{dx} + r\,\mathrm{ch}\,r\frac{dr}{dx} = Rr\,\mathrm{ch}\,r. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $p(x) \neq 0$, $r(x) \neq 0$, тогда системы (6) и (7) примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{th} p}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} = Q; \\ &\frac{\operatorname{cth} p}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} = R \end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{cth} r}{r}\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dx} = Q; \\ &\frac{\operatorname{th} r}{r}\frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dx} = R. \end{aligned} \tag{9}$$

Каждое из уравнений системы (8) и (9) с разделяющимися переменными. Функции $p(x)$ и $r(x)$ следует определить так, чтобы они удовлетворяли, во-первых, системам уравнений (8) и (9) и, во-вторых, чтобы частные решения (4) были линейно независимыми.

Этим условиям будут удовлетворять

$$\frac{\operatorname{th} p - \operatorname{cth} p}{p}\frac{dp}{dx} = Q - R; \tag{10}$$

$$\frac{\operatorname{th} r + \operatorname{cth} r}{r}\frac{dr}{dx} + 2\frac{dr}{dx} = Q + R. \tag{11}$$

Искомые функции $p(x)$ и $r(x)$ могут быть найдены из уравнений (10) и (11).

Теорема доказана.

Интегрируя уравнения (10) и (11), получим [4]

$$\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n}-2)}{(2n-1)(2n)!} B_n p^{2n-1} = A(x); \tag{12}$$

$$-\frac{1}{r} + \frac{10}{3}r + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{4n}}{(2n-1)(2n)!} B_n r^{2n-1} = D(x), \tag{13}$$

где B_n — числа Бернули [4],

$$A(x) = \int [Q(x) - R(x)]\, dx + C; \tag{14}$$

$$D(x) = \int [Q(x) + R(x)]\, dx + C;$$

$$0 < p(x) < \frac{\pi}{2} \quad 0 < r(x) < \frac{\pi}{2}.$$

В левой части уравнений (12) и (13) имеем [5] ряды Лорана некоторых аналитических функций $F_1(p)$ и $F_2(r)$ в кольце с нулевым внутренним радиусом. Чтобы получить решение исходной системы (3) в форме (5), требуется из уравнений (12) и (13) явно найти $p(x) = F_1[A(x)]$ и $r(x) = F_2[D(x)]$.

Учитывая, что главные части рядов Лорана (12) и (13) имеют только по одному члену, задача определения обратной функции [6] упрощается, но потребуется дополнительное исследование однозначности обратной функции.

Так как левые части уравнений (12) и (13) имеют одинаковый общий вид, алгоритмы нахождения функций $p(x)$ и $r(x)$ будут одинаковы.

Найдем обратную функцию $p(x) = F_1[A(x)]$ из равенства (12), для чего исследуем изолированную особую точку левой части уравнения. Так как главная часть лорановского разложения имеет только один член с вычетом $+1$ и $\lim\limits_{p\to 0} F_1(p)=\infty$, то в точке $p=0$ функция $F_1(p)$ имеет [5] простой плюс. Тогда [6] функция $\varphi(p)=\frac{1}{F_1(p)}<1$ будет аналитической. Поэтому точка $p=0$ правильна для функции $\varphi(p)$, а ряд Лорана для функции $F_1(p)$ превращается [5, 6] в ряд Тейлора для функции $\psi(p)$.

Действительно, перепишим уравнение (12) с учетом приведенных выше соображений

$$\frac{1}{A(x)}=\frac{p}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n p^{2n}}, \tag{15}$$

где

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-2)}{(2n-1)(2n)!}B_n. \tag{16}$$

$$(p=p(x))$$

Воспользуемся правилом деления степенных рядов для правой части уравнения (15). Необходимые условия для этой операции [6], во-первых, сходимость рядов, стоящих в числителе и знаменателе, что следует из равенства (12); во-вторых, отличие от нуля свободного члена ряда, стоящего в знаменателе, $(b_0=1)$.

В круге $p<R$, где R — наименьший из модулей особых точек числителя и знаменателя, в нашем случае нулей знаменателя [5], частное от деления снова представляется в виде степенного ряда

$$\frac{1}{A(x)}=\frac{p(x)}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n p^{2n}(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n p^n(x). \tag{17}$$

Для определения C_n можно воспользоваться [7] соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n p^{2n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} C_n p^n=p, \tag{18}$$

из которого, сравнивая коэффициенты, найдем

$$\begin{gathered} C_0 b_0=0;\ C_0=0;\\ C_1 b_0=1;\ C_1=1;\\ \dots\dots\dots\\ C_n b_0+C_{n-1}b_1+\ldots+C_0 b_n=0. \end{gathered} \tag{19}$$

Система уравнений (19) последовательно разрешается относительно C_0, C_1, C_2, ..., ибо в каждом новом уравнении новый коэффициент C_n входит с множителем $b_0\neq 0$. Из системы уравнений (19) видно, что все четные коэффициенты $C_{2n}=0$, поэтому уравнение (17) можно записать в виде

$$W(x)=\frac{1}{A(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}p^{2n+1}. \tag{20}$$

Уравнение (20) представляет собой ряд Бурмана-Лагранжа [5]. Используя формулу обращения [5], можно найти искомый ряд

$$p(x)=k_1 W(x)+k_2 W^2(x)+\ldots+k_m W^m(x)+\ldots, \tag{21}$$

коэффициенты которого находим [5] по формуле

$$k_m = \frac{1}{m!} \lim_{p \to 0} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left(\frac{p(x)}{W(x)} \right)^m. \tag{22}$$

Уравнение (21) однозначно определяет обратную функцию, так как для существования однозначной обратной функции [6, 10] необходимо, чтобы в уравнении (20) коэффициент $C_1 \neq 0$.

Покажем, что для вычисления коэффициентов k_m ряда (21) не требуется находить коэффициенты C_n из бесконечной системы линейных уравнений (19). Так, подставляя в равенство (22) значение $W(x)$ из уравнения (20), будем иметь

$$k_m = \frac{1}{m!} \lim_{p \to 0} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left(\frac{p}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} p^{2n+1}} \right)^m. \tag{23}$$

Но из уравнения (17) имеем

$$\frac{p}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} p^{2n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n p^{2n}.$$

Тогда уравнение (22) примет вид

$$k_m = \frac{1}{m!} \lim_{p \to 0} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n p^{2n} \right)^m, \tag{24}$$

или после преобразования получим

$$k_m = \frac{1}{m!} \lim_{p \to 0} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n p^n \right)^m, \tag{25}$$

где $g_0 = 1$; $g_{2n} = b_n$; $g_{2n+1} = 0$.
Коэффициенты b_n определяются равенством (16).

Производную в правой части уравнения (25) можно вычислить [11] явно с помощью формулы

$$k_m = \frac{1}{m} \sum_{a_1, a_2, a_3 \ldots} \frac{m(m-1)\ldots(m+1-a_1-a_2-\ldots)}{a_1!\, a_2!\, a_3! \ldots} (g_2)^{a_1} (g_3)^{a_2} \ldots, \tag{26}$$

где

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots = m - 1.$$

Аналогично из уравнения (13) получим искомый ряд для $r(x)$

$$r(x) = h_1 S(x) + h_2 S^2(x) + \ldots + h_m S^m(x) + \ldots, \tag{27}$$

где

$$S(x) = \frac{1}{D(x)} = \frac{1}{\int [Q(x) + R(x)]\, dx + C}. \tag{28}$$

Коэффициенты ряда (27) определяются по формуле

$$h_m = \frac{(-1)^m}{m} \sum_{a_1, a_2, a_3 \ldots} \frac{m(m-1)\ldots(m+1-a_1-a_3-\ldots)}{a_1!\, a_2!\, a_3 \ldots} (t_2)^{a_1} (t_3)^{a_2} \ldots, \tag{29}$$

где

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots = m - 1;\ t_1 = 1;\ t_{2n+1} = 0;$$

$$t_2 = -\frac{10}{3};\ t_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n-1)(2n)!} B_n.$$

Для коэффициентов k_m и h_m можно составить таблицы, что значительно упростит вычисления при анализе систем с переменными параметрами.

ВЫВОДЫ

1. Предложенный метод получения общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами не требует разложения коэффициентов уравнения в ряд.

2. Решение получено в форме, удобной для анализа и синтеза радиотехнических устройств.

3. Коэффициенты рядов для $p(x)$ и $r(x)$ получены в общем виде и могут быть рассчитаны на ЭВМ. При этом, как следует из равенств (26) и (16), а также (29) и (30), коэффициенты k_m и h_m определяются через знакопеременные сходящиеся ряды (12) и (13), что упрощает нахождение остаточного члена [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Б. Ф. Емелин. Теория волноводов. Изд-во «Наука». М.—Л., 1966.
2. Г. Е. Пухов. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1967.
3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во «Наука», 1965.
4. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. Изд-во «Наука», 1957.
5. М. А. Лаврентьев, В. В. Шабат. Методы теории функции комплексного переменного. Изд-во «Наука», 1965.
6. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Т. I. Изд-во «Наука, 1967.
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд-во «Наука», 1962.
8. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. Изд-во «Наука», 1966.
9. В. Л. Данилов и др. Математический анализ. Изд-во «Наука», 1961.
10. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. Изд-во «Наука», 1969.
11. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. I. Изд-во иностр. лит., 1958.