

ПЕРЕДАТОЧНАЯ МАТРИЦА СИНХРОННЫХ ДЕМОДУЛЯТОРОВ

В. И. Гостев

К и е в

Получена передаточная матрица, определяющая математически точные комплексные эквивалентные (для огибающих амплитудно-модулированных сигналов) передаточные функции синхронных демодуляторов.

Синхронные демодуляторы (фазочувствительные детекторы) находят применение в различных областях техники. В частности, они широко применяются в системах автоматического управления, работающих на переменном токе. Однако строгие методы анализа и расчета синхронных демодуляторов развиты еще недостаточно. Цель настоящей работы — отыскание передаточной матрицы синхронных демодуляторов, которая определяет математически точные комплексные эквивалентные передаточные функции демодуляторов.

Математическую модель рассматриваемых синхронных демодуляторов представим (рис. 1, а) последовательным соединением двухполупериодного синхронного переключателя П с функцией переключения $m(t)$ в виде прямоугольной волны (рис. 1, б) и электрической цепи постоянного тока с передаточной функцией вида

$$K(s) = \sum_{v=1}^N \frac{a_v b_v}{s + b_v}, \quad (1)$$

где $b_v = \frac{1}{T_v}$,

T_v — постоянная времени;

a_v — коэффициент передачи.

Анализируя вначале демодулятор, состоящий из последовательного соединения синхронного переключателя П и электрической цепи с передаточной функцией

$$K(s) = \frac{b}{s + b}, \quad (2)$$

определим установившуюся реакцию демодулятора на входной сигнал вида

$$x(t) = \sum_{h=0,1,2,\dots}^{\infty} (\sin \Omega t \sin h\omega_{\text{н}}t + \cos \Omega t \sin h\omega_{\text{н}}t + \sin \Omega t \cos h\omega_{\text{н}}t + \cos \Omega t \cos h\omega_{\text{н}}t) u_{-1}(t) \quad (3)$$

(см. приложение 1).

В выражении (3) $u_{-1}(t)$ — единичная ступенчатая функция, приложенная в момент $t = 0$; Ω — угловая частота огибающих; $\omega_{\text{н}}$ — угловая несущая частота ($\omega_{\text{н}} = \frac{\pi}{T}$, T — период квантования — см. рис. 1).

Таблица 1

h, k -я 4×4 передаточная матрица двухполупериодного синхронного демодулятора, имеющего непрерывную часть с $K(s) = \frac{b}{(s+b)}$

Составляющие входного сигнала	Составляющие выходного сигнала			
	$\sin \Omega t \times \times \sin k\omega_{\text{н}}t$	$\cos \Omega t \times \times \sin k\omega_{\text{н}}t$	$\sin \Omega t \times \times \cos k\omega_{\text{н}}t$	$\cos \Omega t \times \times \cos k\omega_{\text{н}}t$
$\sin \Omega t \times \sin h\omega_{\text{н}}t$	$A_{h,k}$	$A'_{h,k}$	$B_{h,k}$	$B'_{h,k}$
$\cos \Omega t \times \sin h\omega_{\text{н}}t$	$-A'_{h,k}$	$A_{h,k}$	$-B'_{h,k}$	$B_{h,k}$
$\sin \Omega t \times \cos h\omega_{\text{н}}t$	$C_{h,k}$	$C'_{h,k}$	$D_{h,k}$	$D'_{h,k}$
$\cos \Omega t \times \cos h\omega_{\text{н}}t$	$-C'_{h,k}$	$C_{h,k}$	$-D'_{h,k}$	$D_{h,k}$

Связь между установившимся выходным сигналом демодулятора и входным сигналом вида (3) описывается бесконечной матрицей, h, k -я 4×4 субматрица которой приведена в табл. 1.

Общий установившийся выходной сигнал синхронного демодулятора содержит полный ортогональный ряд сигналов в виде модулированных огибающими прямыми и квадратурными несущих $\sin k\omega_{\text{н}}t$ и $\cos k\omega_{\text{н}}t$.

Элементы матрицы табл. 1 являются комплексными функциями двух аргументов:

относительной частоты

$$K = \frac{\Omega}{\omega_{\text{н}}} \quad (4)$$

и относительного параметра цепи постоянного тока

$$\beta = \frac{T}{T_v} = bT = \frac{b\pi}{\omega_{\text{н}}}, \quad (5)$$

которые определяются формулами

$$A_{h,k} = \frac{2\beta}{\pi^2} \frac{hk}{h^2 - k^2} \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} + \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right]; \quad (6)$$

$$A'_{h,k} = j \frac{2\beta}{\pi^2} \frac{hk}{h^2 - k^2} \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} - \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right]; \quad (7)$$

$$B_{h,k} = \frac{2\beta}{\pi^2} \frac{h}{h^2 - k^2} \left[\frac{\frac{\beta}{\pi} - jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} + \frac{\frac{\beta}{\pi} + jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right]; \quad (8)^*$$

(при $k \neq 0$)

$$B'_{h,k} = j \frac{2\beta}{\pi^2} \frac{h}{h^2 - k^2} \left[\frac{\frac{\beta}{\pi} - jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} - \frac{\frac{\beta}{\pi} + jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right] \quad (9)^*$$

(при $k \neq 0$),

$$C_{h,k} = -\frac{2\beta}{\pi^2} \frac{k}{h^2 - k^2} \left[\frac{\frac{\beta}{\pi} - jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} + \frac{\frac{\beta}{\pi} + jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right]; \quad (10)$$

$$C'_{h,k} = -j \frac{2\beta}{\pi^2} \frac{k}{h^2 - k^2} \left[\frac{\frac{\beta}{\pi} - jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} - \frac{\frac{\beta}{\pi} + jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right]; \quad (11)$$

$$D_{h,k} = \frac{2\beta}{\pi^2} \frac{k^2}{h^2 - k^2} \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} + \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right]; \quad (12)$$

$$D'_{h,k} = j \frac{2\beta}{\pi^2} \frac{k^2}{h^2 - k^2} \left[\frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK\right)^2 + k^2} - \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \right]. \quad (13)$$

Следует отметить, что если входной сигнал содержит только нечетные гармонические составляющие ($h = 1, 3, 5, \dots$), то выходной сигнал демодулятора содержит только четные гармонические составляющие ($k = 0, 2, 4, 6, \dots$), и наоборот.

Наибольший интерес и практическую ценность представляет связь между огибающими входного и выходного сигналов. Для определения этой связи схему демодулятора (рис. 1, а) представим структурной схемой (рис. 1, в), где $F(t)$ — огибающая входного сигнала — поступает вначале на множительное устройство, а затем сформированный сигнал $x(t)$ — на вход демодулятора. Если $F(t) = \sin \Omega t + \cos \Omega t$, то $x(t)$ определяется формулой (3). Запишем теперь огибающую в комплексной форме

$$\bar{F}(t) = e^{j\Omega t} = \cos \Omega t + j \sin \Omega t. \quad (14)$$

Тогда входной сигнал демодулятора запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= e^{j\Omega t} \left\{ \sum_{h=0,1,2,\dots}^{\infty} \sin h\omega_{\text{н}} t + \sum_{h=0,1,2,\dots}^{\infty} \cos h\omega_{\text{н}} t \right\} = \\ &= \sum_{h=0,1,2,\dots}^{\infty} (j \sin \Omega t \sin h\omega_{\text{н}} t + \cos \Omega t \sin h\omega_{\text{н}} t + \\ &\quad + j \sin \Omega t \cos h\omega_{\text{н}} t + \cos \Omega t \cos h\omega_{\text{н}} t). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь огибающие на несущих $\sin h\omega_{\text{н}} t$ и $\cos h\omega_{\text{н}} t$ выражены в комплексной форме. На основании табл. 1 можно записать новую матрицу, которая описывает связь между огибающими, выраженными в комплексной форме, установившегося выходного сигнала демодулятора и огибающими, также выраженными в комплексной форме, входного сигнала (15); h, k -тая 2×2 субматрица этой новой матрицы приведена в табл. 2.

* При $k = 0$

$$B_{h,0} = \frac{2\beta^2}{\pi^3} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2 + K^2} \quad \text{и} \quad B'_{h,0} = -\frac{2\beta}{\pi^2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{K}{\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2 + K^2}.$$

Поскольку под комплексными эквивалентными передаточными функциями, связывающими k -ю прямую (на несущей $\sin k\omega_n t$) и квадратурную (на несущей $\cos k\omega_n t$) огибающие выходного сигнала с h -й прямой (на несущей $\sin h\omega_n t$) или квадратурной (на несущей $\cos h\omega_n t$) огибающими входного сигнала, принимают отношение этих огибающих, выраженных в комплексной форме, то, очевидно, табл. 2 дает математически точные выражения для комплексных эквивалентных передаточных функций двухполупериодного синхронного демодулятора, имеющего в качестве фильтра электрическую цепь с передаточной функцией $K(s) = \frac{b}{(s+b)}$. Поскольку эквивалентную передаточную матрицу синхронного демодулятора, имеющего фильтр с передаточной функцией вида (1), находим на основании принципа суперпозиции путем простого суммирования матриц табл. 2 ($\nu = 1, 2, 3 \dots N$) с соответствующими параметрами b , и коэффициентами a_ν , то эквивалентную передаточную матрицу (табл. 2) назовем основной.

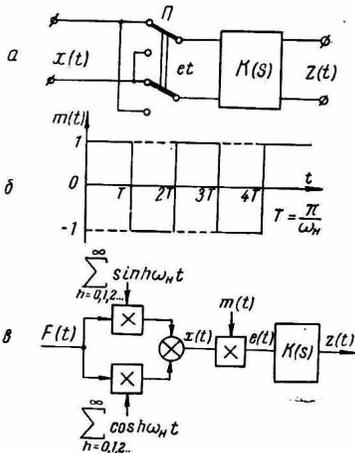


Рис. 1.

Таблица 2

h, k -я 2×2 эквивалентная передаточная матрица двухполупериодного синхронного демодулятора, имеющего непрерывную часть с передаточной функцией $K(s) = \frac{b}{(s+b)}$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_n t$	$\cos k\omega_n t$
$\sin h\omega_n t$	$K_{\text{пр } h, k}(jK) = A_{h, k} + jA'_{h, k} = \frac{4\beta}{\pi^2} \cdot \frac{hk}{h^2 - k^2} \times \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \times \sigma_{h, k}$	$K_{\text{кв } h, k}(j, K) = B_{h, k} + jB'_{h, k} = \frac{4\beta}{\pi^2} \cdot \frac{h}{h^2 - k^2} \times \frac{\frac{\beta}{\pi} + jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \times \sigma_{h, k}$
$\cos h\omega_n t$	$K'_{\text{пр } h, k}(jK) = C_{h, k} + jC'_{h, k} = -\frac{4\beta}{\pi^2} \cdot \frac{k}{h^2 - k^2} \times \frac{\frac{\beta}{\pi} + jK}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \times \sigma_{h, k}$	$K'_{\text{кв } h, k}(jK) = D_{h, k} + jD'_{h, k} = \frac{4\beta}{\pi^2} \cdot \frac{k^2}{h^2 - k^2} \times \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK\right)^2 + k^2} \cdot \sigma_{h, k}$

Примечание. 1) $\sigma_{h, k} = \begin{cases} 1 & \text{при } h = 0, 2, 4 \dots (h = 1, 3, 5 \dots), \text{ но } k = 1, 3, 5 \dots \\ & (k = 0, 2, 4 \dots); \\ 0 & \text{при } h = 0, 2, 4 \dots (h = 1, 3, 5 \dots) \text{ и } k = 0, 2, 4 \dots \\ & (k = 1, 3, 5 \dots); \end{cases}$

2) при $k=0$ $K_{\text{кв } h, 0}(jK) = \frac{2\beta}{\pi^2 h} \cdot \frac{1}{\frac{\beta}{\pi} + jK} \cdot \sigma_{h, 0}$

Полученная эквивалентная передаточная матрица полностью описывает все свойства двухполупериодного демодулятора, позволяя весьма просто определить коэффициент передачи и динамические свойства демодулятора для основной, постоянной составляющей на выходе, рассмотреть пульсации выходного напряжения, прохождение квадратурной и высших гармонических составляющих через демодулятор и т. д.

Рассмотрим простой пример. На вход демодулятора (рис. 1, а), имеющего $K(s) = \frac{b}{(s+b)}$, поступает сигнал $x(t) = 1 \cdot \sin \omega_H t$. Параметр демодулятора $\beta = bT = 1$ (например, $f_H = 50$ гц, $T = \frac{1}{2f_H} = 0,01$ сек, $b = \frac{1}{T} = 100 \frac{1}{\text{сек}}$). Определим пульсации на выходе демодулятора в установившемся режиме.

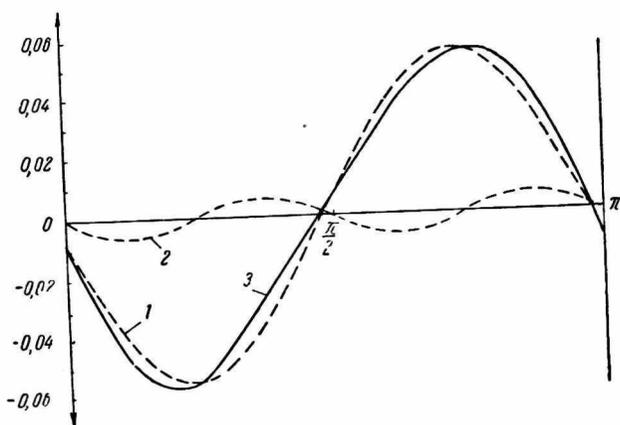


Рис. 2.

На основании табл. 2 при $K = 0$ и $h = 1$ для входного сигнала $\sin \omega_H t$ имеем

$$z(t)_{\text{уст}} = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \left[\frac{4\beta}{\pi^2} \cdot \frac{k}{1-k^2} \cdot \frac{\frac{\beta}{\pi}}{\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2 + k^2} \right] \sin k\omega_H t + \\ + \left[\frac{4\beta}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1-k^2} \cdot \frac{\frac{\beta}{\pi}}{\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2 + k^2} \right] \cos k\omega_H t.$$

При $\beta = 1$ вычисляем

$$z(t)_{\text{уст}} = 0,637 - 0,0538 \sin 2\omega_H t - 0,00857 \cos 2\omega_H t - \\ - 0,00633 \sin 4\omega_H t - 0,000504 \cos 4\omega_H t - \dots$$

На рис. 2 показана вторая гармоника (1), четвертая гармоника (2) и их суммарное напряжение (3) на выходе демодулятора. Доля шестой и более высоких гармоник в выходном напряжении пренебрежимо мала. Постоянная составляющая $z_0(t)_{\text{ст}} = \frac{2}{\pi} = 0,637$.

Динамические свойства демодулятора для постоянной составляющей описываются передаточной функцией

$$K_{\text{кв } 1,0}(jK) = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\beta}{\pi}}{\frac{\beta}{\pi} + jK} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \Omega T_v}$$

Полученная передаточная матрица (табл. 2) дает возможность весьма просто рассчитать пульсации выходного напряжения демодулятора с любой другой непрерывной частью, определяемой формулой (1), при поступлении на вход напряжений на различных гармонических несущих.

Рассмотрим, например, составляющую входного сигнала

$$x(t) = \sin \Omega t \sin h \omega_H t \cdot u_1(t) = \frac{1}{2} [\cos (h \omega_H - \Omega) t - \cos (h \omega_H + \Omega) t] u_1(t) \quad (\text{п. 1})$$

при $h = 1, 3, 5 \dots$

Изображение по Лапласу этой составляющей

$$X(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{s}{s^2 + (h \omega_H - \Omega)^2} - \frac{s}{s^2 + (h \omega_H + \Omega)^2} \right]. \quad (\text{п. 2})$$

Изображение по Лапласу сигнала на выходе синхронного переключателя П [$x(t)$] $m(t)$ определяется на основании теоремы свертки в комплексной области и равно

$$E(s) = \frac{1}{4} \left[\frac{\text{cth} \frac{T(s+j\Omega)}{2}}{s-j(h\omega_H-\Omega)} + \frac{\text{cth} \frac{T(s-j\Omega)}{2}}{s+j(h\omega_H-\Omega)} - \frac{\text{cth} \frac{T(s-j\omega)}{2}}{s-j(h\omega_H+\Omega)} - \frac{\text{cth} \frac{T(s+j\Omega)}{2}}{s+j(h\omega_H+\Omega)} \right]. \quad (\text{п. 3})$$

Изображение по Лапласу сигнала на выходе демодулятора

$$Z(s) = E(s) K(s) = E(s) \cdot \frac{b}{(s+b)} = \frac{j\omega_H h b}{2} \left\{ \frac{\text{cth} \frac{T(s+j\Omega)}{2}}{(s+b)[(s+j\Omega)^2 + (h\omega_H)^2]} - \frac{\text{cth} \frac{T(s-j\Omega)}{2}}{(s+b)[(s-j\Omega)^2 + (h\omega_H)^2]} \right\}. \quad (\text{п. 4})$$

Определение выходного сигнала $z(t)$ (оригинала от выражения $Z(s)$) связано с вычислением интегралов вида

$$I_{1,2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\text{cth} \frac{T(s \pm j\Omega)}{2}}{(s+b)[(s \pm j\Omega)^2 + (h\omega_H)^2]} e^{st} ds. \quad (\text{п. 5})$$

Интегральное выражение для интегралов $I_{1,2}$ имеет простые полюсы в точках $s = -b$ и $s = \mp j\Omega + j\omega_H k$ (где $k = 0$ и $k = \pm 2, 4, 6 \dots$ при $h = 1, 3, 5 \dots$). Вычисление интегралов $I_{1,2}$ приводит к следующему результату:

$$I_{1,2} = \frac{\text{cth} \frac{-Tb \pm j\Omega T}{2}}{\omega_H^2 \left[\left(-\frac{\beta}{\pi} \pm jK \right)^2 + h^2 \right]} e^{-bt} + \frac{2}{\pi \omega_H^2} (\cos \Omega t \mp j \sin \Omega t) \cdot \frac{1}{h^2 \left(\frac{\beta}{\pi} \mp jK \right)} + \frac{4}{\pi \omega_H^2} (\cos \Omega t \mp j \sin \Omega t) \times \sum_{k=2, 4, 6 \dots}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{\pi} \mp jK \right) \cos k\omega_H t + k \sin k\omega_H t}{(h^2 - k^2) \left[\left(\frac{\beta}{\pi} \mp jK \right)^2 + k^2 \right]} \quad (\text{п. 6})$$

$K = \frac{\Omega}{\omega_H}$ и $\beta = bT = \frac{T}{T_v} = \frac{\pi}{\omega_H T_v}$. Первый член в выражении (п. 6) может рассматриваться как член, соответствующий переходному процессу, а второй и третий — установившемуся процессу. Таким образом, установившееся значение выходного сигнала

получается путем перехода от изображений (П. 4) к оригиналу с учетом второго и третьего членов в правой части выражения (п. 6). В результате находим

$$z(t)_{\text{уст}} = j \frac{2\beta h}{\pi^2} \left\{ \frac{\cos \Omega t - j \sin \Omega t}{2h^2 \left(\frac{\beta}{\pi} - jK \right)} - \frac{\cos \Omega t + j \sin \Omega t}{2h^2 \left(\frac{\beta}{\pi} + jK \right)} + \right. \\ \left. + (\cos \Omega t - j \sin \Omega t) \sum_{k=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{\pi} - jK \right) \cos k\omega_H t + k \sin k\omega_H t}{(h^2 - k^2) \left[\left(\frac{\beta}{\pi} - jK \right)^2 + k^2 \right]} - \right. \\ \left. - (\cos \Omega t + j \sin \Omega t) \sum_{k=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{\pi} + jK \right) \cos k\omega_H t + k \sin k\omega_H t}{(h^2 - k^2) \left[\left(\frac{\beta}{\pi} + jK \right)^2 + k^2 \right]} \right\} \quad (\text{п. 7})$$

Аналогичным образом определяются сигналы на выходе демодулятора при поступлении составляющей $\cos \Omega t \sin h\omega_H t$. Определение выходных сигналов для составляющих $\sin \Omega t \cos h\omega_H t$ и $\cos \Omega t \cos h\omega_H t$ связано с вычислением интегралов вида

$$I_{3, 4} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{(s \pm j\Omega) \operatorname{cth} \frac{T(s \pm j\Omega)}{2}}{(s + b) [(s + j\Omega)^2 + (h\omega_H)^2]} e^{st} ds. \quad (\text{п. 8})$$

Подынтегральное выражение для интегралов $I_{3, 4}$ имеет те же полюсы, что и для $I_{1, 2}$. Вычисление интегралов $I_{3, 4}$ приводит к следующему результату:

$$I_{3, 4} = \frac{\left(-\frac{\beta}{\pi} \pm jK \right) \operatorname{cth} \frac{-Tb \pm j\Omega T}{2}}{\omega_H \left[\left(-\frac{\beta}{\pi} \pm jK \right)^2 + h^2 \right]} + \\ + \frac{4}{\pi\omega_H} (\cos \Omega t \mp j \sin \Omega t) \sum_{k=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{k^2 \cos k\omega_H t - k \left(\frac{\beta}{\pi} \mp jK \right) \sin k\omega_H t}{(h^2 - k^2) \left[\left(\frac{\beta}{\pi} \mp jK \right)^2 + k^2 \right]} \quad (\text{п. 9})$$

Второй член в правой части выражения (п. 9) соответствует установившемуся процессу.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Гостев. Корректирующие четырехполосники с прерывателями. Изд-во «Техника», Киев, 1965.
2. В. И. Гостев. Корректирующие устройства с прерывателями. Изд-во «Техника», Киев, 1968.