

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ — III. РЕЗОНАНСНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА

В. А. Омельченко

Х а р ь к о в

Одним из современных направлений в области спектрального анализа сигналов является спектральный анализ в реальном масштабе времени.

Методы этого направления характеризуются способностью формировать в реальном масштабе времени спектры последовательных отрезков сигнала и определяются [1] способами выполнения преобразования Фурье, характерными для классов функций, которыми описывают сигналы. В качестве таких классов в работе выбраны следующие классы пространства $L_2(-\infty, \infty)$ -функций с конечной энергией:

$L_{1,2}$ — абсолютно интегрируемых функций;

B — абсолютно интегрируемых функций с ограниченным спектром;

D_1 — абсолютно интегрируемых функций с конечной протяженностью во времени.

Эти классы учитывают свойства произвольных сигналов обладать конечной энергией, существовать конечное время и иметь практически ограниченный спектр.

В первых двух разделах работ [1, 2] рассмотрены методы спектрального анализа, определяемые способами выполнения преобразования Фурье, характерными для классов B и $L_{1,2}$. В настоящей статье рассматривается метод анализа, определяемый способом выполнения преобразования Фурье в третьем из выбранных классов — в классе D_1 абсолютно интегрируемых функций с конечной протяженностью во времени.

1. Основные соотношения

Синтезируем функциональную схему анализатора спектра, формирующего в реальном масштабе времени спектр сигнала в виде частичной суммы ряда Котельникова. Такое представление спектра характерно для сигналов класса D_1 .

Пусть сигнал из D_1 описывается функцией $f(t)$, тождественно равной нулю вне интервала времени $|t| \leq \frac{T}{2}$. Спектр этого сигнала можно записать в виде

$$S(j2\pi f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{S} \left(\frac{2\pi n}{T} \right) \frac{\sin \pi (Tf - n)}{\pi (Tf - n)}, \quad (1)$$

где $\bar{S} \left(\frac{2\pi n}{T} \right)$ — отсчеты спектра в точках $\frac{2\pi n}{T}$.

Заменяя в частичной сумме ряда (1) f на t , T на Φ , получаем функцию

$$S(j2\pi f) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{S}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \frac{\sin \pi (\Phi t - n)}{\pi (\Phi t - n)}, \quad (2)$$

которую будем формировать в пределах интервала T в реальном масштабе времени как огибающую высокочастотного колебания:

$$y(t) = \operatorname{Re}[S_N(j2\pi t) \exp(j\omega_0 t)]. \quad (3)$$

При этом приходим к выражению

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} S\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \cos\left[\omega_0 t + \varphi\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right] \frac{\sin \pi (\Phi t - n)}{\pi (\Phi t - n)} \quad (4)$$

для отклика на выходе искомого анализатора. (Здесь $\Phi = \frac{N}{\alpha T}$, $\alpha \leq 1$).

Так как

$$S_N(j2\pi t) = S_N(2\pi t) \exp[j\varphi_N(2\pi t)],$$

выражение (4) можно привести к виду

$$y(t) = S_N(2\pi t) \cos[\omega_0 t + \varphi_N(2\pi t)]. \quad (5)$$

Отсюда следует, что измерение амплитудного $S_N(2\pi t)$ и фазового $\varphi_N(2\pi t)$ спектров сигнала сводится к амплитудному и фазовому детектированию отклика.

Из найденного выражения (4) вытекает, что для получения спектра в виде частичной суммы ряда Котельникова необходимо из входного сигнала $f(t)$ формировать сигналы

$$S\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \cos\left[\omega_0 t + \varphi\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right], \quad (6)$$

умножать их на соответствующие базисные функции

$$\frac{\sin \pi (\Phi t - n)}{\pi (\Phi t - n)}$$

и суммировать результирующие сигналы

$$S\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \cos\left[\omega_0 t + \varphi\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right] \frac{\sin \pi (\Phi t - n)}{\pi (\Phi t - n)}. \quad (7)$$

Для выполнения указанных операций можно использовать схему рис. 1, а, построенную на базе гребенки из N фильтров, которые имеют временные характеристики

$$g_n(t) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left\{\exp\left(j\frac{2\pi n}{T_1} t\right)\right\}, & -\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2} + \frac{2N}{\Phi} \\ 0, & t \notin \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} + \frac{2N}{\Phi}\right]. \end{cases} \quad (8)$$

В этом случае при входном воздействии $f(t)$ на выходе n -ого фильтра формируется отклик

$$y_n(t) = \begin{cases} \left| \int_{-\frac{T_1}{2}}^t f(x) \exp\left(-j\frac{2\pi n}{T_1}x\right) dx \right| \cos\left[\frac{2\pi n}{T_1}t + \varphi\left(\frac{2\pi n}{T_1}\right)\right], \\ -\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2}, \\ \left| \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(x) \exp\left(-j\frac{2\pi n}{T_1}x\right) dx \right| \cos\left[\frac{2\pi n}{T_1}t + \varphi\left(\frac{2\pi n}{T_1}\right)\right], \\ \frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2} + \frac{2N}{\Phi}, \\ 0, \quad t \in \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} + \frac{2N}{\Phi}\right], \end{cases}$$

содержащий при $t > \frac{T_1}{2}$ необходимую информацию о спектре входного сигнала. Если центральную частоту этого отклика преобразовать до величины ω_0 , то при $\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2} + \frac{2N}{\Phi}$ он будет совпадать с выражением (6). Поэтому, умножая преобразованные сигналы $y_n^*(t)$ на базисные функции

$$\frac{\sin \pi \Phi \left(t - \frac{T_1}{2} - \frac{N}{\Phi}\right)}{\pi \Phi \left(t - \frac{T_1}{2} - \frac{N}{\Phi}\right)},$$

задерживая каждый из полученных сигналов

$$\vec{y}_n(t) = \frac{\sin \pi \Phi \left(t - \frac{T_1}{2} - \frac{N}{\Phi}\right)}{\pi \Phi \left(t - \frac{T_1}{2} - \frac{N}{\Phi}\right)}$$

на соответствующую величину $\frac{n}{\Phi}$ и суммируя результирующие сигналы, получим искомое выражение

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(x) \exp\left(-j\frac{2\pi n}{T_1}x\right) dx \right| \cos\left[\omega_0 t + \varphi\left(\frac{2\pi n}{T_1}\right)\right] \times \\ \times \frac{\sin \pi \left[\Phi t - \frac{\Phi T_1}{2}(N+n)\right]}{\pi \left[\Phi t - \frac{\Phi T_1}{2}(N+n)\right]}, \quad (10) \\ \frac{T_1}{2} + \frac{N}{\Phi} \leq t \leq \frac{T_1}{2} + \frac{2N}{\Phi}.$$

Здесь положено $\frac{\omega_0 n}{\pi} = 2\pi L_n$, где L_n — целое число.

Отклик (10) формируется после окончания воздействия входного сигнала. Использовать для получения (10) часть интервала времени, на котором существует сигнал, нецелесообразно, так как на нем еще не получена полная информация о спектре. Поэтому для синтеза спектра сигнала длительностью T_1 надо затратить время, превышающее величину T_1 , и анализ в реальном времени не представляется возможным.

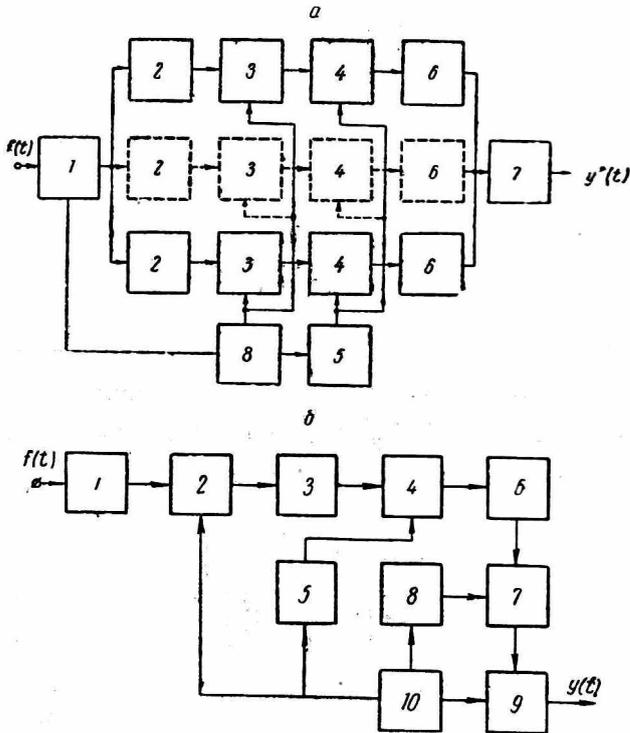


Рис. 1. Функциональные схемы резонансных анализаторов спектра:

а) схема анализатора на базе гребенки из N фильтров $f(t)$ — входной сигнал; $y^*(t)$ — выходной сигнал (1 — коммутатор, открывающий вход устройства на время T_1 с периодом $T_1 + \frac{2N}{\Phi}$; 2 — анализирующие фильтры; 3 — схемы сдвига частоты; 4 — перемножители; 5 — генератор базисных сигналов; 6 — линии задержки на время $\frac{n}{\Phi}$; 7 — сумматор; 8 — синхронизатор);

б) Схема на базе анализатора со сжатием сигнала во времени:

$f(t)$ — входной сигнал; $y(t)$ — выходной сигнал (1 — входной фильтр, выделяющий исследуемую полосу частот; 2 — временной компрессор; 3 — восстановительный фильтр; 4 — гетеродинный смеситель; 5 — перестраиваемый гетеродин; 6 — анализирующий фильтр; 7 — перемножитель; 8 — генератор базисных сигналов; 9 — суммирующее устройство, вводящее необходимые временные сдвиги для суммируемых сигналов и выполняющее суммирование последних; 10 — синхронизатор).

От этого недостатка схемы рис. 1, а можно избавиться, если вместо гребенки фильтров использовать анализатор со сжатием сигнала во времени. Тогда за счет соответствующего выбора коэффициента сжатия сигнала можно обеспечить анализ в реальном масштабе времени. При этом приходим к схеме рис. 1, б. Здесь сигнал ускоряется и многократно повторяется. Преобразованный сигнал сдвигается по частоте по ступен-

чтотому закону и анализируется фильтром с частотной характеристикой типа $\frac{\sin x}{x}$. Получаемые на выходе фильтра отклики в соответствующие моменты времени перемножаются с базисными сигналами и после введения необходимых временных сдвигов суммируются.

На основном этапе формирования спектра в схемах рис. 1 используется явление резонанса, поэтому рассмотренный метод спектрального анализа назовем резонансным.

2. Сигналы, анализируемые резонансным анализатором спектра

Резонансный метод можно применять для измерения спектра сигналов из класса D_1 , т. е. сигналов, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty, \quad (11)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

К ним относятся импульсы сложной формы с длительностью, не превышающей величины T , а также отрезки длительностью T произвольных непериодических, периодических и почти периодических сигналов. В последнем случае следует применять периодический процесс анализа. При этом мгновенный спектр измеряется в течение каждого периода анализа.

3. Основные параметры резонансного анализатора

(рис. 1, б)

Разрешающая способность по частоте. При анализе сигналов с дискретным спектром основной метрологической характеристикой анализатора является его разрешающая способность R по частоте.

Так как при анализе сжатого сигнала фильтром с временной характеристикой типа (8) отклики на выходе последнего содержат отсчеты спектра этого сигнала, величину R можно определить непосредственно по спектру.

Найдем R при сжатии на фиксированном и скользящем интервалах памяти. Для этого сначала получим спектр преобразованного сигнала.

При сжатии на фиксированном интервале памяти спектр можно представить [5] в виде ряда

$$S_{\text{вых. ф}}(\omega) = \frac{2\pi}{P} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-j\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) P \Delta t\right] - 1}{\exp\left[-j\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \Delta t\right] - 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n \frac{2\pi}{T} - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \Phi\left[-\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \frac{P-1}{P} - n \frac{2\pi}{T}\right], \quad (12)$$

а при сжатии на скользящем интервале — в виде ряда

$$S_{\text{вых. с}}(\omega) = \frac{2\pi}{P} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta t} - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \Phi\left[-\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \frac{P-1}{P} - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right]. \quad (13)$$

Здесь $F(\omega)$ — спектр входного сигнала;
 $\Phi(\omega)$ — спектр весовой функции, взвешивающей отрезок сигнала длительностью T ;

$P = \frac{T}{T_{\text{вых}}}$ — коэффициент сжатия;

$T_{\text{вых}} = \Delta t$ — длительность сжатой копии исследуемого отрезка сигнала;

$\Delta t = \frac{1}{m\Phi_0}$ — период взятия выборок входного сигнала;

m — коэффициент, характеризующий допустимую погрешность дискретизации;

Φ_0 — полоса частот, в которой сосредоточен спектр исследуемого сигнала.

Спектры (12) и (13) дают соответственно последовательность спектров

$$S_{\Phi\nu}(\omega) = \frac{2\pi}{P} \frac{\exp\left[-j\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) P \Delta t\right] - 1}{\exp\left[-j\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \Delta t\right] - 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n \frac{2\pi}{T} - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \Phi\left[-\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \frac{P-1}{P} - n \frac{2\pi}{T}\right]. \quad (14)$$

и

$$S_{\text{св}}(\omega) = \frac{2\pi}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta t} - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) \Phi\left[-\frac{P-1}{P}\left(\omega - \nu \frac{2\pi P}{\Delta t}\right) - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right], \quad (15)$$

расположенных относительно нуля, частоты $\frac{P}{\Delta t}$ и ее гармоник. При любом номере ν каждый из спектров $S_{\Phi\nu}(\omega)$ или $S_{\text{св}}(\omega)$ имеет бесконечную протяженность, но в интервале частот

$$\nu \frac{P}{\Delta t} \leq f \leq \nu \frac{P}{\Delta t} + P\Phi_0 \quad (16)$$

оглабающая его основных составляющих совпадает со спектром входного сигнала, расширенным в P раз. Следовательно, структура $S_{\text{вых. ф}}(\omega)$ и $S_{\text{вых. с}}(\omega)$ практически одинакова.

При выделении для анализа полосы частот

$$\nu_0 \frac{P}{\Delta t} \leq f \leq \nu_0 \frac{P}{\Delta t} + P\Phi_0 \quad (16a)$$

вместе со спектром $S_{\nu_0}(\omega)$ сюда попадают «хвосты» $S_{\nu}(\omega)$, $\nu \neq \nu_0$. Пренебрегая последними и полагая $\nu_0 = 0$, получаем

$$S_{\text{вых. ф}}(\omega) = \frac{2\pi}{P} \frac{\exp[-j(\omega P \Delta t)] - 1}{\exp[-j(\omega \Delta t)] - 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n \frac{2\pi}{T}\right) \Phi\left[-\omega \frac{P-1}{P} - n \frac{2\pi}{T}\right] \quad (17)$$

и

$$S_{\text{вых. с}}(\omega) = \frac{2\pi}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \Phi\left[-\omega \frac{P-1}{P} - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right]. \quad (18)$$

Возникающую при этом погрешность можно оценить на основании результатов работы [6], а допустимую погрешность обеспечить [5] выбором величины коэффициента m .

Выражения (17) и (18) позволяют вычислить разрешающую способность по частоте.

Применяя описанную в работе [7] методику вычислений, приходим к соотношению

$$R = f(D, \varphi, \rho) \frac{1}{T}, \quad (D \gg 1), \quad (19)$$

где $f(D, \varphi, \rho)$ — функция, зависящая от весовой функции $\varphi(t)$, критерия различимости ρ и динамического диапазона D ;

R — разрешающая способность по частоте в масштабе спектра входного сигнала.

В частности, при весовой обработке сигнала прямоугольной весовой функцией имеем [7]

$$R = \frac{\rho}{\pi} D \frac{1}{T}, \quad D \gg 1.$$

Отсюда видно, что разрешающая способность очень зависит от D . Однако степень влияния D на R можно уменьшить за счет выбора функции $\varphi(t)$. Например, при весовой обработке функцией косинус-квадрат справедливо [7] выражение

$$R = \sqrt[3]{\frac{\rho}{\pi} D} \frac{1}{T}, \quad D \gg 1.$$

Полоса обзора. Информация о спектре входного сигнала содержится в полосе, которую можно определить из условия $\Delta t = \frac{1}{m\Phi_0}$. Отсюда, учитывая, что $\Delta t = \frac{T}{P}$, получаем формулу

$$\Phi_0 = \frac{P}{mT}. \quad (20)$$

При характерных для рассмотренной функциональной схемы значениях $N = \frac{P}{m}$ и $\alpha = \frac{1}{P}$ найденная величина Φ_0 связана с Φ соотношением $\Phi_0 = \frac{\Phi}{P}$.

Время однократного анализа спектра. Анализ спектра в полосе обзора осуществляется за время $T_a = \frac{T}{m}$ [5] независимо от способа сжатия сигнала. Однако при периодическом процессе анализа период анализа следует выбирать различным при сжатии на фиксированном и скользящем интервалах памяти.

Так как при сжатии на фиксированном интервале памяти ускоренные копии отрезков сигнала формируются периодически с периодом T , период анализа $T_{\text{оф}}$ нужно выбирать из условия

$$T_{\text{оф}} = T. \quad (21a)$$

При сжатии на скользящем интервале памяти ускоренная копия сигнала непрерывно обновляется и за время $\frac{T}{m}$ успевает обновиться на $\frac{100}{m}$ %. Поэтому период анализа $T_{\text{ос}}$ выбираем согласно

$$T_{\text{ос}} = \frac{T}{m}. \quad (21б)$$

Скорость анализа. Взаимосвязь основных параметров анализатора удобно представить через эквивалентную скорость анализа

$$\gamma = \frac{\Phi_0}{T_0}. \quad (22)$$

Это выражение при сжатии на фиксированном интервале памяти в развернутой форме имеет вид

$$\gamma_{\Phi} = \frac{P}{mf^2(D, \varphi, \rho)} R^2, \quad (22a)$$

а при сжатии на скользящем интервале

$$\gamma_c = \frac{mP}{f^2(D, \varphi, \rho)} R^2. \quad (22б)$$

Легко показать, что при весовой обработке сигнала прямоугольной весовой функцией при $D = 1$ справедливы формулы

$$\gamma_{\Phi} = \frac{P}{m} R^2 \quad (22a_1)$$

и

$$\gamma_c = mPR^2. \quad (22б_1)$$

Отсюда следует, что взаимосвязь основных параметров анализатора существенно зависит от коэффициента сжатия сигнала.

Таковы основные особенности резонансного метода спектрального анализа, определяемого способом выполнения преобразования Фурье в классе абсолютно интегрируемых функций с конечной протяженностью во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Омельченко. Спектральный анализ сигналов в реальном масштабе времени — I. Вопросы общей теории. Интерференционный метод анализа. Сб. «Радиотехника», вып. 16. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.

2. В. А. Омельченко. Спектральный анализ сигналов в реальном масштабе времени — II. Дисперсионный метод анализа. Сб. «Радиотехника», вып. 16. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.

3. Эрих, Стейнберг. Панорамный анализатор спектра в реальном времени. «Зарубежная радиотехника», 1960, № 7.

4. Б. Г. Кадук, К. Б. Круковський-Синевич, В. В. Садовський. Спектральный анализ из стисненням масштабу часу. Вид-во «Техніка», Київ, 1968.

5. В. А. Омельченко. Формирование мгновенного спектра при последовательном анализе ускоренного сигнала. Вестник Харьковского политехнического института, № 36 (84), «Радиотехника», вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.

6. И. Т. Турбович. Некоторое обобщение теоремы Котельникова. «Радиотехника», 1956, № 4.

7. В. А. Омельченко и др. Разрешающая способность анализатора спектра сжатого сигнала с учетом динамического диапазона амплитуд. Вестник Харьковского политехнического института, № 22 (70), «Радиотехника», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.