

К УЧЕТУ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

И. П. Якименко, В. Н. Крепак

Сравнение теоретических и экспериментальных данных при исследовании распространения волн в плазменных волноводах все еще проводится с большим трудом, несмотря на то, что теория распространения волн в таких волноводах уже достаточно хорошо развита [1—4]. Серьезным препятствием является то, что при разработке теории обычно применяется модель однородного цилиндра, тогда как реальный плазменный цилиндр всегда неоднороден как по сечению, так и вдоль оси. В результате процессов амбиполярной диффузии и пристеночной рекомбинации устанавливается следующее распределение концентрации по сечению плазменного столба [5]:

$$n = n_0 j_0 \left(\frac{2 \cdot 405 r}{a} \right), \quad (1)$$

где a — радиус плазменного цилиндра, а n_0 — концентрация электронов на оси.

Если длина свободного пробега соизмерима с размерами сосуда или если плазма помещена в магнитное поле, то распределение концентрации может существенно отличаться от (1). Кроме того, в ограниченной плазме часто возникают переходные слои (например, ленгмюровский слой у стенки [6].) Таким образом, распределение концентрации в ограниченной плазме, вообще говоря, неравномерно и весьма произвольно. Ввиду этого при построении теории колебаний плазменного цилиндра, адекватного плазменным столбам, возникающим в лабораторных условиях, следует предполагать, что плотность электронов является произвольной функцией радиуса. Ограничиваясь случаем холодной изотропной плазмы, для диэлектрической проницаемости запишем тогда:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n(r)}{m} \quad (2)$$

(e и m — заряд и масса электрона).

Представим поля в виде интегралов Фурье по z и t :

$$\vec{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{\omega\beta} e^{-i(\omega t - \beta z)} d\omega d\beta. \quad (3)$$

Тогда уравнения Максвелла для Фурье-компонентов запишутся следующим образом:

$$\text{rot } \vec{E} = ik\vec{H}; \quad \text{rot } \vec{H} = -ik\epsilon\vec{E}; \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (4)$$

где $\epsilon = \epsilon(r)$.

Применяя операцию rot к первому из уравнений (4) и учитывая, что

$$\text{div } E = -\bar{E} \frac{\text{grad } \epsilon}{\epsilon}, \quad (5)$$

приходим к такому уравнению для вектора \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} + k^2 \epsilon \vec{E} + \nabla \left(\frac{\nabla \epsilon \vec{E}}{\epsilon} \right) = 0. \quad (6)$$

Легко видеть, что это уравнение в общем случае произвольной зависимости ϵ от координат не разрешимо, хотя его решение и может быть найдено в ряде частных случаев (например, когда ϵ — линейная функция r). Поэтому при построении теории волн в неоднородном цилиндре анализируются либо эти частные случаи, либо применяются различные искусственные приемы [6—8]. Оказывается, что особенно плодотворные результаты могут быть получены с помощью концепции слоистого цилиндра, когда непрерывное распределение плотности электронов заменяется дискретным так, что закон изменения ϵ от r сохраняется [8]. Как показано в [8], преимущества такого рассмотрения состоят в том, что, во-первых, оно применимо к случаю произвольно неоднородного цилиндра, во-вторых, оно автоматически включает возможность слоистой неоднородности и, в-третьих, путем обратного перехода от дискретного к непрерывному открывается принципиальная возможность для построения функций, описывающих поля в неоднородном цилиндре.

В работе [8] показано, что дисперсионное уравнение для $N + 1$ -слойного цилиндра (N сколь угодно велико) имеет следующий простой вид:

$$\Gamma_{N+1} = 0, \quad (7)$$

где Γ_i определяется с помощью рекуррентных соотношений

$$\Gamma_{i+1} = \gamma_i \Gamma_i + \beta_i \Gamma'_i; \quad \Gamma'_{i+1} = \bar{\gamma}_i \Gamma'_i + \alpha_i \Gamma_i, \quad (8)$$

причем

$$\Gamma'_0 = 0; \quad \Gamma_0 = 1.$$

Остальные коэффициенты в (8) также весьма просты:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{i+1}{k_{i+1}} I_0(k_i a_i) I_1(k_{i+1} a_i) - \frac{\epsilon_i}{k_i} I_0(k_{i+1} a_i) I_1(k_i a_i); \\ \beta_i &= \frac{\epsilon_{i+1}}{k_{i+1}} K_0(k_i a_i) K_1(k_{i+1} a_i) - \frac{\epsilon_i}{k_i} K_0(k_{i+1} a_i) K_1(k_i a_i); \\ \gamma_i &= \frac{\epsilon_{i+1}}{k_{i+1}} I_0(k_i a_i) K_1(k_{i+1} a_i) + \frac{\epsilon_i}{k_i} K_0(k_{i+1} a_i) I_1(k_i a_i); \\ \bar{\gamma}_i &= \frac{\epsilon_{i+1}}{k_{i+1}} K_0(k_i a_i) I_1(k_{i+1} a_i) + \frac{\epsilon_i}{k_i} I_0(k_{i+1} a_i) K_1(k_i a_i), \end{aligned} \quad (9)$$

где $k_i^2 = \zeta^2 - k^2 \epsilon_i$; a_i и ϵ_i — радиус и диэлектрическая проницаемость i -го слоя.

Предположим, что концентрация электронов линейно изменяется вдоль радиуса цилиндра и в пристеночной области составляет половину того значения n_0 , которое она принимает на оси цилиндра. Тогда

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{r}{2a} \right). \quad (10)$$

Вводя параметры

$$x = \frac{\omega a}{c}; \quad \alpha_0 = \frac{\omega_0 a}{c}, \quad (11)$$

представим диэлектрическую проницаемость в виде

$$\epsilon(r) = 1 - \frac{\alpha_0^2}{x^2} \left(1 - \frac{r}{2a}\right). \quad (12)$$

Разбивая цилиндр на $N + 1$ концентрических слоев, получим

$$\epsilon_l = 1 - \frac{\alpha_0^2}{x^2} \left(1 - \frac{l}{2(N+1)}\right). \quad (13)$$

Рассмотрим три случая: $N = 1$, $N = 4$ и $N = 9$ (соответственно 2-, 5- и 10-слойный цилиндр). Очевидно, что линейное изменение плотности

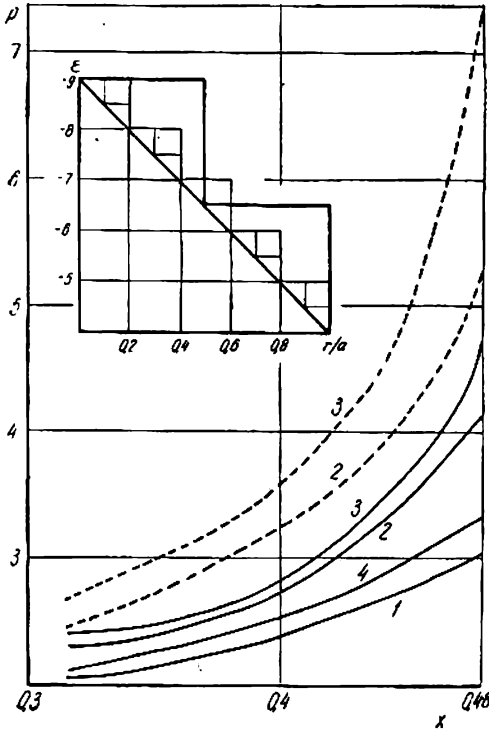


Рис. 1.

плазмы заменяется при этом ступенчатым со все более мелким шагом, как это видно из рисунка. Зависимость замедления фазовой скорости от частоты, рассчитанная по уравнению (7), изображена на рисунке сплошными линиями (1 — $N = 1$, 2 — $N = 4$, 3 — $N = 9$). Приведенные кривые наглядно демонстрируют, как сильно влияет профиль электронной концентрации на волноводные свойства плазменного цилиндра. Особенно усиливается это влияние по мере увеличения частоты и приближения ее к граничной частоте (когда $\rho = \frac{c}{V_{\phi}} \rightarrow \infty$). Отметим, что на рисунке показана только первая, самая низкочастотная ветвь дисперсионных кривых неоднородного плазменного цилиндра и дисперсия поэтому имеет нормальный характер (замедление возрастает с частотой). В общем случае N -слойного цилиндра, как это установлено в [8], существует ряд областей распространения волн,

разделенных соответствующими граничными частотами, и в этих областях возможна как нормальная, так и аномальная дисперсия. Но самая низкочастотная ветвь всегда отличается нормальной дисперсией, что подтверждается и нашими расчетами, приведенными на рисунке. Из рисунка видно также, что кривые 2 (5-слойный цилиндр) и 3 (10-слойный цилиндр) расположены гораздо ближе друг к другу, чем кривые 1 и 2. Это указывает на то, что по мере увеличения числа N , когда линейное распределение (12) все точнее аппроксимируется ступенчатым распределением (13), решение уравнения (7) все более приближается к истинному значению фазовой скорости для неоднородного

плазменного цилиндра с линейным распределением плотности типа (12). В этом смысле кривая 3 наиболее близка к графику зависимости фазовой скорости от частоты для цилиндра с линейным профилем концентрации электронов.

Поскольку здесь исследуются свойства поверхностных E -волн в плазменном волноводе, то можно ожидать, что часто используемая замена неоднородного цилиндра однородным с диэлектрической проницаемостью, усредненной по сечению цилиндра, здесь окажется несостоятельной, так как не весь объем плазменного цилиндра одинаково влияет на распространяющуюся волну. Действительно, кривая 4 на рисунке, изображающая замедление фазовой скорости однородного цилиндра с усредненной диэлектрической проницаемостью, весьма далека от кривой 3, причем ошибка резко возрастает по мере приближения к граничной частоте. Для сравнения на рисунке приведены также расчетные зависимости фазовой скорости от частоты для однородного плазменного цилиндра с таким значением диэлектрической проницаемости, как во внешнем слое неоднородного цилиндра (пунктирные кривые: 2 — $N = 4$, 3 — $N = 9$).

Точно так же, как это мы сделали для случая линейного распределения концентрации, решая уравнение (7), можно определить фазовую скорость и при любом другом распределении плотности плазмы по радиусу. Конкретные результаты настоящей работы показывают, что, во-первых, нужно осторожно пользоваться выводами теории однородного цилиндра, когда производится сравнение с экспериментом (немного дает здесь и усреднение диэлектрической проницаемости по сечению), и, во-вторых, разработка теории неоднородного цилиндра позволит сильно продвинуться в применении поверхностных волн для диагностики ограниченной плазмы. При наличии расчетных зависимостей, построенных по (7) при большом N и для разных законов распределения $n(r)$, практические измерения позволят судить не только о величине концентрации, но и о ее распределении по радиусу.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Schumann. Z. Naturforsch, 5a, 613, 1950.
2. Л. М. Пятигорский. «Уч. зап. ХГУ», 6, 23, Харьков, 1955.
3. Я. Б. Файнберг. Proc. Symposium CERN, 1, 84, 1956; Я. Б. Файнберг. М. Ф. Горбатенко. ЖТФ, 29, 549, 1959.
4. В. П. Шестопалов, И. П. Якименко, В. Д. Филь. Изв. вузов — «Радиофизика», 1962, 5, 176.
5. W. Shottky. Phys. Zs. 25, 342, 635. 1924.
6. W. O. Schumann. Z. angew. Phys., 12, 298, 1960; 12, 145, 1960.
7. H. G. Stäblein. Z. angew. Phys., 17, 41, 1964.
8. И. П. Якименко. ЖТФ, 30, 868, 1966.