РАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

И. П. Якименко, С. В. Троицкий

1. Тепловое излучение ряда цилиндрических систем с плазмой рассмотрено в [2, 3]. В этих работах предполагалось, что плазменный бъем находится в свободном пространстве, и поэтому вычислялась олько мощность одностороннего теплового излучения. Если несколько сложнить систему, расположив на некотором расстоянии от оси металлический экран, охватывающий плазменный цилиндр, то, кроме излучаемого плазмой потока энергии, возникает еще отраженный поток и системе устанавливается равновесное излучение [1]. Если отражающий экран является идеально проводящим (идеальное зеркало), то коэффициент отражения от него равен единице, отраженный поток равен падающему и полная проекция вектора Умова—Пойнтинга в радиальном направлении (усредненного по равновесному распределению состояний) должна быть равна нулю. Это физическое положение подтверждается в настоящей работе математическим расчетом. Однако та часть энергии, которая идет от цилиндра к зеркалу, подвергается существенным изменениям. Она, в частности, зависит теперь от радиуса металлического экрана.

Большой интерес представляет вычисление полной плотности энергии равновесного флуктуационного излучения. Как известно [1], из выражения для потока энергии автоматически выпадает энергия так называемого квазистационарного теплового поля (связанная с «медленными» волнами, возникающими в ограниченной плазме). Эта энергия, конечно, полностью учитывается при вычислении плотности энергии флуктуационного поля. Если экран не является идеальным, то в принципе можно даже ставить вопрос об экспериментальном обнаружении энергии квазистационарного теплового поля [1].

Поскольку рассматриваемая система (плазменный цилиндр, окруженный металлическим экраном) по существу является круглым волноводом с плазмой, то непосредственный интерес представляет также вычисление потока энергии вдоль оси системы. Наконец, в настоящей работе вычисляется также плотность потока энергии и полная энергия в пустом цилиндрическом канале в безграничной плазме. Оказывается, что флуктуационная энергия в этом случае имеет резонансы на частотах, отличных от резонансных частот плазменного цилиндра. Вопросы, рассматриваемые в данной работе, представляют непосредственный интерес для разработки новых методов диагностики плазмы и источников регулируемой шумовой энергии.

2. Рассмотрим бесконечно длинный плазменный цилиндр радиуса a, помещенный внутри идеального металлического экрана радиуса b.

Чтобы определить интересующую нас флуктуационную энергию в пространстве $a < r < b$, необходимо решить краевую электродинамическую задачу, учитывая при этом «сторонние» электрические индукции в объеме, занятом плазмой. Предположим, что плазма находится во внешнем постоянном магнитном поле, направленном вдоль оси системы. Тогда, не учитывая газокинетическое давление (холодная плазма) и пользуясь результатами работы [2], запишем сразу Фурье-компоненты полей в области, занятой плазмой:

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\lambda_1\gamma_1^2}{k\varepsilon_z}(A_2 I_1 + \Phi_1) - \frac{\lambda_2\gamma_2^2}{k\varepsilon_z}(B_2 I_2 + \Phi_2);\\
E_\varphi &= -(A_2 I_1' + \Phi_1') - (B_2 I_2' + \Phi_2') - \frac{nb_1}{r}(A_2 I_1 + \Phi_1) - \\
&\quad - \frac{nb_2}{r}(B_2 I_2 + \Phi_2) - \frac{ik^4\eta\varepsilon_z}{\varepsilon\gamma_1^2\gamma_2^2}K_r + \frac{k^2(\beta^2 - k^2\varepsilon)\varepsilon_z}{\varepsilon\gamma_1^2\gamma_2^2}K_\varphi;\\
H_z &= -\frac{i\gamma_1^2}{k}(A_2 I_1 + \Phi_1) - \frac{i\gamma_2^2}{k}(B_2 I_2 + \Phi_2); \qquad (1)\\
H_\varphi &= -i\lambda_1(A_2 I_1' + \Phi_1') - i\lambda_2(B_2 I_2' + \Phi_2') + \frac{in\beta}{kr}(A_2 I_1 + \Phi_1) + \\
&\quad + \frac{in\beta}{kr}(B_2 I_2 + \Phi_2) + \frac{\beta k(\beta^2 - k^2\varepsilon)\varepsilon_z}{\varepsilon\gamma_1^2\gamma_2^2}K_r + \frac{ik^3\beta\eta\varepsilon_z}{\varepsilon\gamma_1^2\gamma_2^2}K_\varphi,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,2}(a) &= \pm\frac{\pi k\lambda_{2,1}H_n^{(1)}(\gamma_{1,2}a)}{2\gamma_{1,2}^2(\lambda_2 - \lambda_1)}\int\limits_0^a\left\{-\frac{i\lambda_{1,2}\gamma_{1,2}^2}{\varepsilon_z}K_z - \frac{inkb_{1,2}}{r}K_\varphi + \right.\\
&\quad\left. + \frac{nk}{r}K_r + kb_{1,2}\frac{I_{1,2}'}{I_{1,2}}K_r - ik\frac{I_{1,2}'}{I_{1,2}}K_\varphi\right\}I_{1,2}r\,dr, \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$b_{1,2} = \frac{k^2\varepsilon - \beta^2 - \gamma_{1,2}^2}{k^2\eta},\ \gamma_{1,2}^2 = a_1 - b_0\lambda_{2,1},\ \lambda_{1,2} = \frac{-a_2 + a_1}{2b_0} \pm$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{2b_0}\right)^2 + 1},\ a_1 = \frac{\varepsilon_z(k^2\varepsilon - \beta^2)}{\varepsilon},\ a_2 = k^2\varepsilon - \beta^2 - \frac{k^2\eta^2}{\varepsilon},$$

$$b_0 = \frac{\beta k\eta}{\varepsilon},\ k = \frac{\omega}{c},\ I_{1,2} = I_n(\gamma_{1,2}r),$$

K_i — «сторонние» электрические индукции; ε, η, ε_z — компоненты те зора диэлектрической проницаемости холодной плазмы; A_2, B_2 — по стоянные. Штрих означает производную по r. Полное поле предста ляется через Фурье-компоненты в виде

$$\vec{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\,d\beta\,\vec{E}_{n\beta\omega}(r)\,e^{i(\beta z + n\varphi - \omega t)}. \qquad (3)$$

В пространстве $a < r < b$ необходимо учесть не только поле, изл чаемое плазмой, но и поле, отраженное от цилиндрического экра Первое поле при выбранной нами временной зависимости долж быть выражено через функцию Ханкеля первого рода, а второе — чер функцию Ханкеля второго рода. Тогда в области $a < r < b$ имеем (далее снова записываются выражения для Фурье-компонент, а индексы $n\beta\omega$ опускаются):

$$E_z = A_1 H_n^{(1)}(\gamma r) + C_1 H_n^{(2)}(\gamma r);$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{n\beta}{r}\left[A_1 H_n^{(1)}(\gamma r) + C_1 H_n^{(2)}(\gamma r)\right] + ik\left[B_1 \frac{\partial H_n^{(1)}(\gamma r)}{\partial r} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + D_1 \frac{\partial H_n^{(2)}(\gamma r)}{\partial r}\right]\right\};$$

$$H_z = B_1 H_n^{(1)}(\gamma r) + D_1 H_n^{(2)}(\gamma r); \tag{4}$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{n\beta}{r}\left[B_1 H_n^{(1)}(\gamma r) + D_1 H_n^{(2)}(\gamma r)\right] - ik\left[A_1 \frac{\partial H_n^{(1)}(\gamma r)}{\partial r} + C_1 \frac{\partial H_n^{(2)}(\gamma r)}{\partial r}\right]\right\};$$
$$\gamma^2 = k^2 - \beta^2.$$

Радиальная компонента плотности потока энергии с единицы длины цилиндра, очевидно, имеет вид

$$P_{\omega r} = \frac{cr}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \left\{\left(\overline{E_\varphi H_z^*} - \overline{E_z H_\varphi^*} + \overline{(E_\varphi^* H_z} - \overline{E_z^* H_\varphi}\right)\right\}. \tag{5}$$

Черта сверху означает усреднение по равновесному распределению состояний. Подставляя (4) в (5), находим:

$$P_{\omega r} = \frac{ikcr}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta}{\gamma^2}\left\{\left(H_n^{(1)} \frac{\partial H_n^{(1)*}}{\partial r} - H_n^{(1)*} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial r}\right)(|\overline{A_1}|^2 + |\overline{B_1}|^2) - \right.$$
$$- \left(H_n^{(2)*} \frac{\partial H_n^{(2)}}{\partial r} - H_n^{(2)} \frac{\partial H_n^{(2)*}}{\partial r}\right)(|\overline{C_1}|^2 + |\overline{D_1}|^2) +$$
$$\left. + \left(H_n^{(2)} \frac{\partial H_n^{(1)*}}{\partial r} - H_n^{(1)*} \frac{\partial H_n^{(2)}}{\partial r}\right)(\overline{D_1 B_1^*} + \overline{C_1 A_1^*}) - \text{к. с.}\right\}. \tag{6}$$

Разобьем теперь промежуток интегрирования по β на два интервала $|\beta| > |k|$ и $|\beta| < |k|$ и воспользуемся следующими свойствами сомножителей, входящих в (6):

$$H_n^{(1)} \frac{\partial H_n^{(1)*}}{\partial r} - H_n^{(1)*} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial r} = \begin{cases} -\dfrac{4i}{\pi r}, & |\beta| \leqslant |k| \\ 0, & |\beta| > |k| \end{cases}$$

$$H_n^{(2)} \frac{\partial H_n^{(2)*}}{\partial r} - H_n^{(2)*} \frac{\partial H_n^{(2)}}{\partial r} = \begin{cases} +\dfrac{4i}{\pi r}, & |\beta| \leqslant |k| \\ 0, & |\beta| > |k| \end{cases} \tag{7}$$

$$H_n^{(2)} \frac{\partial H_n^{(1)*}}{\partial r} - H_n^{(1)*} \frac{\partial H_n^{(2)}}{\partial r} = \begin{cases} 0, & |\beta| \leqslant |k| \\ (-1)^{n+1}\dfrac{4i}{\pi r}, & |\beta| > |k| \end{cases}$$

$$H_n^{(1)} \frac{\partial H_n^{(2)*}}{\partial r} - H_n^{(2)*} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial r} = \begin{cases} 0, & |\beta| \leqslant |k| \\ (-1)^{n}\dfrac{4i}{\pi r}, & |\beta| > |k|. \end{cases}$$

Тогда (6) принимает вид

$$P_{\omega r} = \frac{2ck}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-k}^{+k} \frac{d\beta}{\gamma^2} [(|\overline{A}|^2 + |\overline{B}|^2) - (|\overline{C_1}|^2 + |\overline{D_1}|^2) + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \int_{-\infty}^{-k} \frac{d\beta}{\gamma^2} [\overline{D_1 B_1^*} + \overline{C_1 A_1^*} - \text{к. с.}] + (-1)^n \int_{k}^{\infty} \frac{d\beta}{\gamma^2} [\overline{D_1 B_1^*} + \overline{C_1 A_1^*} - \text{к. с.}] \right\}. \tag{8}$$

Заметим, что если бы отраженная волна отсутствовала ($C_1 = D_1 = 0$), то (8) немедленно переходило бы в выражение для плотности потока энергии плазменного цилиндра, полученное в [2]. Но если имеется экран из идеального проводника, то при $r = b$ должно быть

$$E_z = E_\varphi = 0. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = -A_1 \frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{H_n^{(2)}(\gamma b)}; \; D_1 = -B_1 \frac{\partial H_n^{(1)}(\gamma b)}{\partial b} \Big/ \frac{\partial H_n^{(2)}(\gamma b)}{\partial b}. \tag{10}$$

Тогда

$$|A_1|^2 - |C_1|^2 = |A_1|^2 \left(1 - \left|\frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{H_n^{(2)}(\gamma b)}\right|^2\right). \tag{11}$$

Но так как

$$\left|\frac{H_n^{(1)}}{H_n^{(2)}}\right|^2 = 1,$$

что соответствует физически очевидному предположению о том, что коэффициент отражения равен единице, из (11) получаем

$$|A_1|^2 - |C_1|^2 = 0. \tag{12}$$

Аналогично можно показать, что сумма всех остальных членов в (8) равна нулю и, таким образом,

$$P_{\omega r} = 0. \tag{13}$$

Соотношение (12) верно при всех b (в том числе и при $b \to \infty$), и поэтому, устремляя радиус экрана к бесконечности, мы не получаем предельного перехода к случаю плазменного цилиндра. Это связано с тем, что пространство между плазменным цилиндром и металлическим экраном заполнено непоглощающей средой и вся энергия, излучаемая плазмой, доходит до экрана, а затем возвращается обратно. Если предположить, что в пространстве $a < r < b$ находится прозрачная среда, обладающая все же небольшим поглощением, то мощность излучения плазменного цилиндра постепенно затухает и при $b \to \infty$ следует ожидать перехода к случаю плазменного цилиндра в свободном пространстве. Действительно, при больших z [4]

$$H_n^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\varphi}; \; H_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\varphi}, \tag{14}$$

$$\varphi = z - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

При наличии слабого затухания

$$z = u + iv, \quad v \ll u, \quad v = v_0 b, \tag{15}$$

и мы получаем

$$\frac{H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(2)}(z)} = e^{2i\varphi} = e^{-2v_0 b} e^{2i\left[u - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что при $b \to \infty$

$$\lim_{b \to \infty} \left| \frac{H_n^{(1)}}{H_n^{(2)}} \right| = 0, \tag{17}$$

и из (8) мы получаем формулу для теплового излучения плазменного цилиндра в свободном пространстве. Этот математический результат полностью соответствует физическому содержанию задачи.

3. Вычислим теперь поток мощности, связанный с волнами, бегущими от цилиндра к экрану. Для этого необходимо с помощью граничных условий при $r = a$ выразить A_1 и B_1 через $\vec{K}$, а затем произвести усреднение, пользуясь флуктуационно-диссипационной теоремой [5]. Легко показать, что

$$A_1 = \frac{\delta_{1i}\varphi_i}{\Delta}; \quad B_1 = \frac{\delta_{2i}\varphi_i}{\Delta}, \quad (i = 1, 2), \tag{18}$$

где

$$\delta_{1\,1,2} = \frac{ik\lambda_{2,1}\Delta_{1,2}}{\gamma_{1,2}^2 H_1 I_{1,2}}; \quad \delta_{2\,1,2} = \frac{ik\lambda_{2,1}\Delta_{3,4}}{\gamma_{1,2}^2 H_2 I_{1,2}};$$

$$\Delta_{1,2} = \frac{k\lambda_{1,2}}{\gamma_{2,1}^2}\frac{I'_{2,1}}{I_{2,1}} - \frac{nk^3(\gamma_{2,1}^2 - \varepsilon_z\gamma^2)}{\beta a\gamma_{2,1}^2\gamma^2} - \frac{k\lambda_{1,2}}{\gamma^2}\frac{H'_1}{H_1};$$

$$\Delta_{3,4} = \frac{ik\varepsilon_z}{\gamma_{2,1}^2}\frac{I'_{2,1}}{I_{2,1}} + \frac{in\beta\lambda_{1,2}(\gamma^2 - \gamma_{2,1}^2)}{a\gamma_{2,1}^2\gamma^2} - \frac{ik}{\gamma^2}\frac{H'_2}{H_2}; \tag{19}$$

$$\Delta = \Delta_2\Delta_3 - \Delta_1\Delta_4; \quad \varphi_{1,2} = \pm\frac{i}{a}\int_0^a f_{1,2} r\, dr;$$

$$H_1 = H_n^{(1)}(\gamma a) - \frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{H_n^{(2)}(\gamma b)} H_n^{(2)}(\gamma a); \quad H_2 = H_n^{(1)}(\gamma a) - \frac{H_n^{(1)\prime}(\gamma b)}{H_n^{(2)\prime}(\gamma b)} H_n^{(2)}(\gamma b),$$

$f_{1,2}$ равно подынтегральному выражению в (2). Так как (18) формально совпадает с представлением постоянных коэффициентов в виде линейных функционалов от $\vec{K}$, полученных в работе [2], то результат усреднения той части (8), которая относится к излучаемым волнам, можно записать сразу:

$$P_\omega = \frac{T}{\pi^4 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} \frac{d\beta}{\gamma^3 |\Delta|^2} (-1)^{i+k} f_{ik}\delta_{li}\delta_{lk}^*, \tag{20}$$

где

$$f_{ik} = \frac{\varepsilon_z''}{|\varepsilon_z|^2}\gamma_i^2\gamma_k^{*2}\lambda_i\lambda_k^* I_1^{ik} + k^2[\varepsilon''(1+b_ib_k^*) - \eta''(b_i+b_k^*)]\,I_2^{ik} +$$
$$+ nk^2[\varepsilon''(b_i+b_k^*) - \eta''(1+b_ib_k^*)]\,I_3^{ik};$$
$$I_1^{ik} = \frac{I_{ni}I_{nk}^{*\prime} - I_{ni}^{\prime}I_{nk}^*}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}}\,a; \tag{21}$$
$$I_2^{ik} = \frac{\gamma_i^2 I_{ni}I_{nk}^{*\prime} - \gamma_k^{*2} I_{nk}^* I_{ni}^{\prime}}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}}\,a; \quad I_3^{ik} = I_{ni}I_{nk}^*.$$

Выражение (20) содержит сумму всех нессимметричных модов флуктуационного излучения. Исследуем подробнее вклад различных модов с $n \geqslant 1$ в важном практическом случае тонкого плазменного цилиндра, когда можно воспользоваться значениями функций Бесселя при малых аргументах

$$\frac{I_n'}{I_n} = -\frac{H_n^{(1)\prime}}{H_n^{(1)}} = \frac{n}{a}; \quad I_{ni} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\gamma_i a}{2}\right)^n; \quad H_n^{(1),(2)} = \mp\frac{i(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\gamma a}\right)^n. \tag{22}$$

Тогда

$$\Delta = \frac{2in^2k^2(\lambda_2-\lambda_1)\varepsilon_z}{a^2\gamma^2\gamma_1^2\gamma_2^2\varepsilon}(\varepsilon - \eta + 1)[k^2(\varepsilon+\eta) - \beta^2];$$
$$(-1)^{i+k} f_{ik}\delta_{li}\delta_{lk}^* = k^2\frac{\varepsilon'' - \eta''}{n!(n-1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}(|\gamma_1^n(1+b_1)\delta_{11} -$$
$$-\gamma_2^n(1+b_2)\delta_{12}|^2 + |\gamma_1^n(1+b_1)\delta_{21} - \gamma_2^n(1+b_2)\delta_{22}|^2); \tag{23}$$
$$\gamma_1^n(1+b_1)\delta_{11} - \gamma_2^n(1+b_2)\delta_{12} = \frac{2\pi n^2\beta k\gamma^n(\lambda_2-\lambda_1)\varepsilon_z}{a\gamma^2\gamma_1^2\gamma_2^2(1+R)\varepsilon}[k^2(\varepsilon+\eta) - \beta^2];$$
$$\gamma_1^n(1+b_1)\delta_{21} - \gamma_2^n(1+b_2)\delta_{22} = -\frac{2\pi i n^2k^2\gamma^n(\lambda_2-\lambda_1)\varepsilon_z}{a\gamma^2\gamma_1^2\gamma_2^2(1+R')\varepsilon}\times$$
$$\times[k^2(\varepsilon+\eta) - \beta^2]; \quad R = \frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{H_n^{(2)}(\gamma b)}; \quad R' = \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial b}\Big/\frac{\partial H_n^{(2)}}{\partial b}.$$

Подставляя (23) в общую формулу (20), получим мощность колебаний с $n \geqslant 1$

$$P_\omega = \frac{T}{\pi^2}\frac{\varepsilon'' - \eta''}{|\varepsilon - \eta + 1|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1}}{n!(n-1)!}\int_0^{+k} d\beta\,\gamma^{2(n-1)}\left(\frac{k^2}{|1+R'|^2} - \frac{\beta^2}{|1+R|^2}\right). \tag{24}$$

Если $n = 1$ и $R = R' = 0$ (переход к плазменному цилиндру в свободном пространстве), то

$$P_{\omega 1} = \frac{2Tk^3a}{3\pi^2}\frac{\varepsilon'' - \eta''}{|1 + \varepsilon - \eta|^2}, \tag{25}$$

т. е. выражение, полученное для мощности теплового излучения плазменного цилиндра в [2]. При наличии экрана $R \neq R' \neq 0$ и из (24) следует, что излучаемый поток мощности зависит от радиуса экрана. Но как и раньше, основную роль играет колебание с $n = 1$.

4. До сих пор мы предполагали, что отражающий экран является идеально проводящим. Если это не так, то коэффициент отражения от

личен от единицы и суммарный поток мощности в радиальном направлении в любом сечении цилиндра не будет равен нулю. Очевидно, что разность между потоками энергии, идущими к экрану и от него, будет равна как раз мощности, поглощаемой неидеальным экраном. Эту мощность при необходимости можно быстро рассчитать с помощью граничных условий Леонтовича. Поскольку температура плазмы значительно выше, чем температура экрана, то собственным тепловым излучением экрана можно пренебречь. Кроме того, изменение магнитного поля вследствие неидеальности экрана, как обычно, не будем учитывать. В нашем случае цилиндрической симметрии граничные условия Леонтовича при $r=b$ имеют вид:

$$E_z = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, H_\varphi; \quad E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, H_z, \tag{26}$$

где μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости материала, из которого сделан экран. Подставляя (26) в выражение для потока мощности (5) при $r=b$, получим мощность, поглощаемую экраном:

$$P_\omega = cb\,\mathrm{Re}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \left(|\overline{H_z}|^2 + |\overline{H_\varphi}|^2\right). \tag{27}$$

Так как H_z и H_φ выражаются через коэффициенты A_1 и B_1 (в предположении, что поле не изменяется экраном), а эти последние уже выражены через функционалы φ_i (18), то формула (27) решает поставленную задачу.

5. Спектральная интенсивность объемной плотности флуктуационной энергии в рассматриваемой системе будет определена, если подставить в общее выражение

$$u_\omega = \frac{1}{4\pi}(\vec{E}\vec{E}^* + \vec{H}\vec{H}^*) \tag{28}$$

компоненты поля в пространстве $a \leqslant r \leqslant b$ (4), а затем произвести усреднение. Из (4) и (28) следует, что

$$u_{\omega n\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{(E_zE_z^* + H_zH_z^*) + \frac{\beta^2+k^2}{\gamma^4}\left(\frac{\partial E_z}{\partial r}\frac{\partial E_z^*}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2}E_zE_z^* + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial H_z^*}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2}H_zH_z^*\right) - \frac{4\beta nk}{r\gamma^4}\,\mathrm{Im}\left(E_z^*\frac{\partial H_z}{\partial r} + H_z\frac{\partial E_z^*}{\partial r}\right)\right\}. \tag{29}$$

Подставляя значение E_z и H_z из (4), получим для флуктуационной энергии, заключенной на отрезке системы длиной l,

$$W_\omega = \frac{l}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\left(L_1\overline{|A_1|^2} + L_2\overline{|B_1|^2} + 2\mathrm{Re}L_3\overline{A_1^*B_1}\right), \tag{30}$$

где

$$L_1 = I_1^{11} + |R|^2 I_1^{22} - 2\mathrm{Re}R^*I_1^{21} + \frac{k^2+\beta^2}{\gamma^4}\left(I_3^{11} + |R|^2 I_3^{22} - 2\mathrm{Re}RI_3^{21}\right);$$
$$L_2 = I_1^{11} + |R'|^2 I_1^{22} - 2\mathrm{Re}R'I_1^{21} + \frac{k^2+\beta^2}{\gamma^4}\left(I_3^{11} + |R'|^2 I_3^{22} - 2\mathrm{Re}R'I_3^{21}\right);$$
$$L_3 = \frac{2ink\beta}{\gamma^4}\left(I_2^{11} + R'R^*I_2^{22} - R^*I_2^{12} - R'I_2^{21}\right), \tag{31}$$

причем

$$I_1^{lm}=\begin{cases} h_1(b)-h_1(a); & |\beta|\leqslant k\\ g_1(b)-g_1(a); & |\beta|\geqslant k\end{cases}$$

$$h_1(r)=\frac{r^2}{2}\left[H_n^l H_n^{m*}-H_{n+1}^l H_{n-1}^{m*}+\frac{n}{\gamma_0 b}(H_n^l H_{n-1}^{m*}-H_{n-1}^l H_n^{m*})\right].$$

$$H_n^l=H_n^l(\gamma_0 r);\ g_1(r)=(-1)^{n+1}\left[H_n^l H_n^m-H_{n+1}^l H_{n-1}^m+\right.$$

$$\left.+\frac{n}{\gamma_0 b}(H_n^l H_{n-1}^m-H_{n-1}^l H_n^m)\right]\frac{r^2}{2};\tag{32}$$

$$I_2^{lm}=H_n^{(l)}(\gamma b)\,H_n^{(m)*}(\gamma b)-H_n^{(l)}(\gamma a)\,H_n^{(m)*}(\gamma a);$$

$$I_3^{lm}=\begin{cases} h_3(b)-h_3(a); & |\beta|<k\\ g_3(b)-g_3(a); & |\beta|>k\end{cases}$$

$$h_3(r)=\frac{(\gamma r)^2}{2}\left[H_n^l H_n^{m*}\left(1-\frac{n^2}{(\gamma r)^2}\right)+\frac{2}{\gamma^2 r}H_n^l\frac{\partial H_n^{m*}}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial H_n^l}{\partial r}\frac{\partial H_n^{m*}}{\partial r}\right];$$

$$g_3(r)=(-1)^{n+1}\frac{(\gamma r)^2}{2}\left[H_n^l H_n^m\left(1-\frac{n^2}{(\gamma r)^2}\right)+\frac{2}{\gamma^2 r}H_n^l\frac{\partial H_n^m}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial H_n^l}{\partial r}\frac{\partial H_n^m}{\partial r}\right].$$

Как видно, выражение (30) отлично от нуля не только при $|\beta|\leqslant k$, но и при $|\beta|>k$. Первый случай соответствует флуктуационной энергии бегущих волн, а второй — энергии медленных или стоячих волн. Подставляя теперь A_1 и B_1 из (18) и производя усреднение, получим после преобразований следующий окончательный результат:

$$W_\omega=\frac{lT}{2\pi^2a^2\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\beta}{|\Delta|^2}(-1)^{i+k}f_{ik}\delta_{li}\Delta_{lk}^*,\tag{33}$$

где

$$\Delta_{1l}=\delta_{1l}L_1^*+\delta_{2l}L_3;\ \Delta_{2l}=\delta_{1l}L_3^*+\delta_{2l}L_2^*.\tag{34}$$

6. Поток энергии вдоль оси системы записывается в виде:

$$P_{\omega z}=\int_a^b\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{S}_{\omega z}r\,dr\,d\varphi,\tag{35}$$

где

$$\overline{S}_{\omega z}=\frac{c}{4\pi}[\overline{E_r H_\varphi^*}-\overline{E_\varphi H_r^*}+\text{к. с.}].\tag{36}$$

Подставляя сюда компоненты поля из (4) и значения постоянных из (18), и затем усредняя полученное выражение с помощью флуктуационно-диссипационной теоремы, получим окончательный результат в таком виде:

$$P_{\omega z}=\frac{cT}{2\pi^2a^2\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\beta}{\gamma^4|\Delta|^2}(-1)^{i+k}f_{ik}\delta_{li}\tilde{\Delta}_{lk}^*,\tag{37}$$

где

$$\tilde{\Delta}_{1i} = \delta_{1i}\tilde{L}_1^* + \delta_{2i}\tilde{L}_3^*,\ \tilde{\Delta}_{2i} = \delta_{1i}\tilde{L}_3^* + \delta_{2i}\tilde{L}_2^*;$$
$$\tilde{L}_1 = 2k\beta\,(I_3^{11} + |R|^2 I_3^{22} - R^* I_3^{12} - R I_3^{21});\tag{38}$$
$$\tilde{L}_2 = 2k\beta\,(I_3^{11} + |R'|^2 I_3^{22} - R' I_3^{12} - R' I_3^{21});$$
$$\tilde{L}_3 = in\,(k^2 + \beta^2)\,I_2^{11} + R'R^* I_2^{22} - R^* I_2^{12} - R' I_2^{21}).$$

Учитывая, что f_{ik}, γ^2, $|\Delta|^2$, δ_{1i}, $\tilde{L}_3$ — четные, а $\tilde{L}_1$ $\tilde{L}_2$, δ_{2i} — нечетные функции от β, можно заметить, что подынтегральное выражение в общей формуле (37) является нечетной функцией от β. Поэтому при интегрировании в бесконечных пределах получится $P_{\omega z} = 0$. Такой результат не удивляет, если учесть, что в случае бесконечно длинной системы (а мы ограничились рассмотрением именно последней) потоки, движущиеся в направлениях $+z$ и $-z$, равны. В условиях реального эксперимента, когда мощность снимается с одного конца системы, в то время как другой конец хорошо согласован с поглощающей нагрузкой, в приемник поступает только однонаправленный поток мощности, что соответствует интегрированию в (37) в пределах $(0, \infty)$,

Формула (37) сильно упрощается в предположении тонкого плазменного цилиндра, когда справедливо (22). Если $n \gg 1$, то

$$P_{\omega z n} = \frac{k^2 a^2 T\,(\varepsilon'' - \eta'')}{\pi^2 n!\,(n-1)!\,|1 + \varepsilon - \eta|^2} \int\limits_0^k \left\{\left(\frac{\gamma a}{2}\right)^{2n-2} \left[\frac{\beta^2}{k^2 I_n^2(\gamma b)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\gamma^2 - \frac{n^2}{b^2}}{I_n'^2(\gamma b)}\right] \frac{1}{\gamma^4} - [(n-1)!]^2 \frac{k^2+\beta^2}{k^2\gamma^2}\right\} \beta\, d\beta.\tag{39}$$

7. Переходя к случаю канала в бесконечной плазме, можно сразу указать, что все общие формулы для этого случая выводятся из полученных в предыдущих разделах путем замен $I_n \to H_n$, $H_n \to I_n$ при $R = R' = 0$. Однако такая формальная аналогия не означает, конечно, тождественности всех физических свойств. Это следует уже из того, что дисперсионные свойства несимметричных волн в плазменном стержне и канале отличаются. Поэтому будут отличаться и предельные формулы для случаев тонкого стержня и канала. Не выписывая здесь полностью соответствующие выражения, заметим только, что если в тонком стержне резонанс при $n \gg 1$ наблюдается, когда

$$\operatorname{Re}(1 + \varepsilon - \eta) = 0,$$

то в тонком канале этот резонанс возникает при

$$\operatorname{Re}(1 + \varepsilon + \eta) = 0.\tag{40}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. М., Изд-во АН СССР, 1953.
2. И. П. Якименко. «Радиофизика», 1965, № 3.
3. И. П. Якименко, Л. А. Назаренко, А. А. Шадрин. Сб. «Радиотехника», 1966, вып. 2.
4. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.