ИССЛЕДОВАНИЕ АСИММЕТРИЧНОГО ОДНОКОЛЬЦЕВОГО КОАКСИАЛЬНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

В. Е. Буданов, А. А. Кириленко, В. Ф. Шинкаренко

Харьков, Славянск

Как известно, в технике СВЧ лучшими резонаторами с точки зрения точного изготовления и получения большой добротности являются цилиндрические. В них настройка на широкий диапазон частот осуществляется перемещением торцовой пластины вдоль оси резонатора, т. е. изменением действующей длины (высоты) цилиндра. Однако возможности подбора соответствующих дисперсионных характеристик в такой простой системе довольно ограничены, так как ее свойства зависят только от двух параметров: диаметра и длины. Интересно проследить, как изменяет спектр частоты и конфигурацию поля введение дополнительных параметров в виде колец.

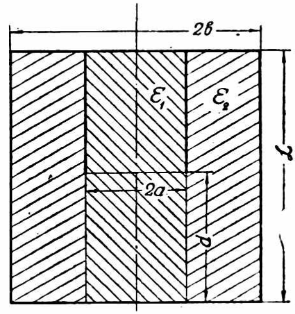

Рис. 1. Осевое сечение исследуемого резонатора.

Задача о нахождении резонансных частот и соответствующих им собственных электромагнитных полей для структуры, изображенной на рис. 1, имеет самостоятельный практический и теоретический интерес в связи с возможностью эффективного использования резонаторов в генераторах и усилителях миллиметровых волн, а также фильтрах типов волн, мультиплексерах умножителях частоты и т. п. Кроме того, такие системы, изготовленные специальным образом, применяются для исследований при низких температурах.

В работе [1] в строгой постановке рассмотрена задача об отыскании собственных частот и собственных колебаний асимметричного однокольцевого коаксиального цилиндрического резонатора (рис. 1). Исходная электродинамическая задача сведена к двум скалярным задачам нахождения решений уравнений Гельмгольца с некоторыми краевыми условиями. Метод, использованный при решении скалярных задач, состоял в сведении их к задаче Римана-Гильберта теории аналитических функций. Был использован метод З. С. Аграновича, В. А. Марченко, В. П. Шестопалова [2], позволяющий находить решения поставленных задач при произвольных параметрах системы и длинах волн. Каждая из поставленных скалярных задач сведена к нахождению решения однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода с быстроубывающими коэффициентами. Неизвестными в полученной системе являются константы разложения в ряд Фурье компонент векторов поля.

Цель настоящей работы состоит в исследовании полученного решения и определении резонансных свойств изучаемой структуры.

Рассмотрим случай магнитных волн. При этом задача о нахождении собственных полей сводится к нахождению решения следующей однородной бесконечной системы уравнений:

$$\sum_{p=1}^{\infty} [\delta_p^{\text{н}} \omega_s^p + \delta_{sp}(1-\delta_p^{\text{н}})]\, b_p = 0; \tag{1}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots); \quad \delta_{sp} = \begin{cases} 1, & s = p, \\ 0, & s \neq p. \end{cases}$$

Здесь сведены следующие обозначения:

$$\delta_p^{\text{н}} = 1 - \frac{2pJ'_m(g_{1p}a)}{g_{1p}\Delta_1 a \left[\frac{g_{2p}}{g_{1p}} \frac{Q_m^{\text{н}}}{G_m^{\text{н}}} J'_m(g_{1p}a) - J_m(g_{1p}a) \right]} \cdot \frac{|p|}{p};$$

$$\omega_s^p = (V_s^p - V_s^{-p}) - (V_0^p - V_0^{-p})\, P_s;$$

$$b_p = \beta_p g_{1p} \left[\frac{g_{2p}}{g_{1p}} \frac{Q_m^{\text{н}}}{G_m^{\text{н}}} J'_m(g_{1p}a) - J_m(g_{1p}a) \right];$$

$$Q_m^{\text{н}} = H_m^{(1)}(g_{2p}a) - \frac{H_m^{(1)'}(g_{2p}b)}{J_m(g_{2p}b)} J_m(g_{2p}b);$$

$$G_m^{\text{н}} = H_m^{(1)'}(g_{2p}a) - \frac{H_m^{(1)'}(g_{2p}b)}{J'_m(g_{2p}b)} J'_m(g_{2p}a);$$

$$g_{1p} = \sqrt{\varepsilon_1 k^2 - h_p^2};$$

$$g_{2p} = \sqrt{\varepsilon_2 k^2 - h_p^2};$$

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad h_p = \frac{p\pi}{L}; \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

$J_m(\rho)$, $H_m^{(1)}(\rho)$, $J'_m(\rho)$, $H_m^{(1)'}(\rho)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля и их производная по аргументу. Выражения для коэффициентов V_s^p получены в работе [2]. Они определяются через $P_s(u)$ — полиномы Лежандра аргумента u, причем $u = \cos\frac{d}{L}$.

Собственные скалярные функции рассматриваемой задачи в первой $(0 < r < a)$ и второй $(a < r < b)$ областях соответственно имеют вид

$$U_1(r, \varphi, z) = e^{im\varphi} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p J_m(g_{1p}r) \sin h_p z; \tag{2}$$

$$U_2(r, \varphi, z) = e^{im\varphi} \sum_{p=1}^{\infty} [\tilde{\beta}_p H_m^{(1)}(g_{2p}r) + \bar{\beta}_p J_m(g_{2p}r)] \sin h_p z,$$

где

$$\tilde{\beta}_p = \beta_p \frac{g_{1p}}{g_{2p}} \frac{J'_m(g_{1p}a)}{G_m^{\text{н}}}; \quad \bar{\beta}_p = -\tilde{\beta}_p \frac{H_m^{(1)'}(g_{2p}b)}{J'_m(g_{2p}b)}.$$

Зная функции U_1 и U_2, можно определить компоненты электромагнитного поля [3].

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{ik}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \quad & H_r &= \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial z}; \\ E_\varphi &= -ik\frac{\partial U}{\partial r}; \quad & H_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi\partial z}; \\ E_z &= 0; \quad & H_z &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2\varepsilon U. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим вначале вопрос о вычислении собственных значений и собственных векторов системы (1). Чтобы система (1) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель, составленный из ее коэффициентов, был нормальным и равнялся нулю

$$\det\left\{\delta_p^{\text{н}}\,\omega_s^p + \delta_{sp}\left(1 - \delta_p^{\text{н}}\right)\right\} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, собственными значениями рассматриваемой задачи будут являться те значения

$$\varkappa = \frac{kL}{\pi},$$

при которых удовлетворяется равенство (4).

После опубликования работы [2] многими авторами детально исследованы возможности метода, предложенного в работе [2]. В частности, было установлено, что матричный оператор системы линейных алгебраических уравнений вида (1) является Фредгольмовым, а к самой системе применим метод усечения, состоящий в том, что бесконечную систему уравнений заменяют конечной. Найдено, что при методе усечений процесс последовательных решений сходится как $\frac{1}{N^3}$, где N — порядок усеченной системы. Было также установлено, что для получения решений, совпадающих с графической точностью с точным решением электродинамической задачи, в рассматриваемых бесконечных системах достаточно выделять системы порядка N, где N — число на единицу большее, чем число однородных гармоник, существующих при данном наборе параметров. В данной задаче это правило свелось к тому, что N выбиралось на единицу больше целой части

$$\left\{\max\left(\varkappa\sqrt{\varepsilon_1},\ \varkappa\sqrt{\varepsilon_2}\right)\right\}.$$

Вычислительные работы проводились на ЭВМ М-20. Вычисление элементов V_s^p не представляет особенных затруднений. Некоторую сложность вызвало нахождение цилиндрических функций, так как аргумент ρ функций Бесселя изменяется в очень большом интервале. Если $0 < |\rho| < 10$, то для вычисления функции Бесселя были использованы представления в виде ряда, при $10 < |\rho| < 43$ использовались асимптотические представления. Это позволило проводить численный анализ решения данной задачи в широком диапазоне изменения параметров структуры.

При фиксированном наборе параметров и заданном начальном приближении корня $\varkappa_0$ для нахождения точного значения корня использован метод Ньютона, состоящий в том, что $(n+1)$ приближение корня вычисляется через n приближение по формулам

$$\varkappa_{n+1} = \varkappa_n + \frac{\Delta(\varkappa_n)}{\Delta'(\varkappa_n)}.$$

Из-за громоздкости аналитического вычисления производной $\Delta'(\varkappa_n)$ она вычислялась численно. При выборе шага по $\varkappa$ для численного дифференцирования мы учитывали следующее: 1) производная получается с тем большей точностью, чем меньше шаг $\delta\varkappa$; 2) $\delta\varkappa$ не может быть меньше некоторой величины, определяемой точностью вычисления самого определителя. Оптимальной оказалась величина $\delta\varkappa = 10^{-5}$. Если рассматривались случаи нахождения производной $\Delta'(\varkappa_n)$ в комплексной области, то производная определялась также численно, но уже по формулам Коши-Римана.

Процесс последовательных уточнений корня считался законченным, если последняя поправка была меньше некоторой величины ε. Как и следовало ожидать, оказалось, что величина ε, определяющая точность корня, влияет не только на точность окончательных результатов, но и является фактором, регулирующим ход вычислительного процесса. При $\varepsilon \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$ и определенном наборе параметров последовательные итерации могли увести вычислительный процесс в сторону от истинного значения корня. Задание же слишком высокой точности вычисления приводит к необоснованно большим затратам машинного времени. С помощью численного исследования было установлено, что наилучшей в обоих отношениях является величина $\varepsilon \sim 10^{-5}$. При этом значение $|\Delta(\varkappa)|$ в точке предпоследнего уточнения было не хуже 10^{-4}.

Найдя при фиксированных параметрах корень системы (1), мы меняем один из параметров на небольшую величину с тем, чтобы, оставаясь в области применения метода Ньютона, найти корень системы при новых параметрах. Так как метод Ньютона при достаточно хорошем выборе начального приближения сходится квадратично, то в программе предусмотрено увеличение шага по параметру, если необходимое число итераций было меньше двух, и уменьшение шага, если число итераций было больше четырех. В целях экономии машинного времени в некоторых случаях мы производили предварительное уточнение начального приближения с помощью линейной интерполяции. Реальный шаг вычислений по параметру лежал в пределах от 0,001 до 0,032.

Отдельно следует остановиться на поисках первичного начального приближения при фиксированном диаметре резонатора $2b$. Ясно, что в данной задаче начальное приближение следует искать при условии, что рассматриваемый резонатор в предельных случаях $\theta = \frac{d}{L} = 1$ и $\theta = 0$ вырождается в цилиндрические резонаторы с известными собственными частотами.

При $\theta = 0$ дисперсионное уравнение (1) распадается на два дисперсионных уравнения: для полого цилиндрического резонатора с диаметром, равным $2a$, и для коаксиального резонатора с диаметрами $2b$ и $2a$. В связи с этим надо отметить, что все собственные частоты исходного резонатора можно разбить на две группы, одна из которых будет «соответствовать» полому цилиндрическому резонатору, а другая — коаксиальному. «Соответствовать» в том смысле, что при исчезновении щели частоты первой группы будут стремиться к соответствующим частотам полого цилиндра, а частоты второй группы — к частотам коаксиального резонатора. Оказывается, что при небольших щелях и большой величине $\frac{a}{b}$ низкочастотную часть спектра будут составлять собственные частоты первой группы, а если $\frac{a}{b}$ мало — второй группы.

Остановимся кратко на результатах исследований некоторых видов колебаний второй группы. Наибольший интерес в данной постановке, естественно, представляют собственные частоты и их зависимость от геометрии резонатора. Выяснено, что геометрия структуры существенным образом влияет на собственные частоты резонатора.

На рис. 2 представлены в виде графиков $\varkappa_{TE_{011}}$ и $\varkappa_{TE_{021}}$ в зависимости от θ для различных значений $\frac{a}{b}$ и $b = L = 1$. Все кривые при $\theta = 1$ сходятся к одной точке, соответствующей собственной частоте полого резонатора. С увеличением высоты внутреннего цилиндра наблю-

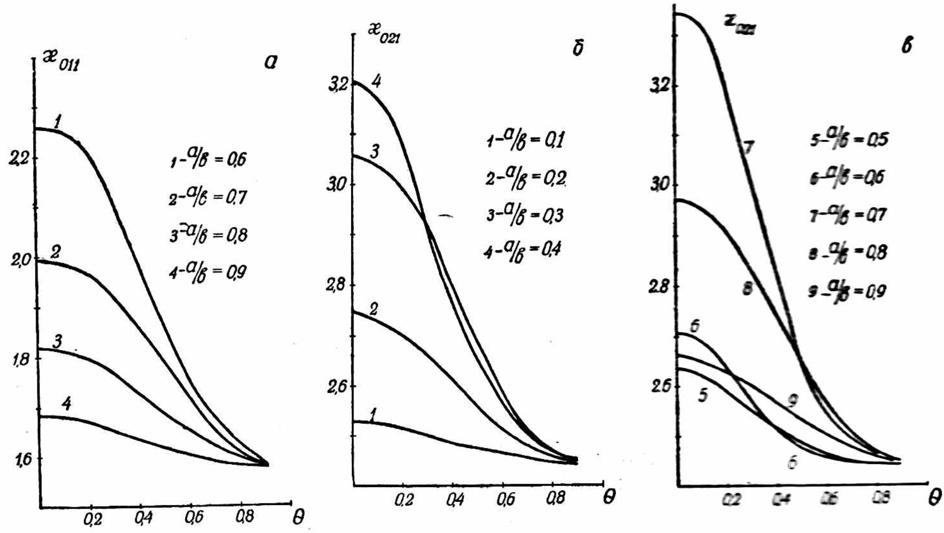

Рис. 2. $\varkappa_{TE_{011}}$ и $\varkappa_{TE_{021}}$ в зависимости от θ для различных значений $\frac{a}{b}$ при $b = L = 1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

дается монотонный рост резонансных частот. Предельные значения при $\theta \to 0$ равны собственным частотам коаксиального резонатора. Наибольшую крутизну имеют кривые с $\frac{a}{b}$, близким к 0,537 для колебания TE_{011} (рис. 2, *а*) и с $\frac{a}{b} = 0{,}37$ и $\frac{a}{b} = 0{,}75$ для колебания TE_{021} (рис. 2, *б*). Качественно это объясняется тем, что внутренний цилиндр именно вблизи этих значений параметра попадает в пучности поля соответствующего полого резонатора, вызывая тем самым наибольшее смещение частоты.

Это ярко иллюстрируется рис. 3, где приведены зависимости $\varkappa_{TE_{011}}$ и $\varkappa_{TE_{021}}$ от $\frac{a}{b}$ для отдельных значений θ и $b = L = 1$. Как и следовало ожидать, кривые в случае TE_{011} (рис. 3, *а*) и TE_{021} (рис. 3, *б*) носят соответственно одногорбый и двугорбый характер (для второго случая двугорбый вследствие существования двух пучностей поля на радиусе для колебания TE_{021} полого цилиндра).

Если $a \to b$ или $a \to 0$, то соответствующие резонансные частоты колебаний TE_{0mp} стремятся к частотам полого цилиндра. При $a \to 0$, например, это объясняется тем, что внутренний цилиндр превращается в бесконечно тонкую нить, лежащую в нуле электрического поля.

В заключение заметим, что при колебаниях типа TE_{0mp} каждый раз, когда величина $\frac{a}{b}$ равна $\frac{\rho_n}{\rho_m}$, [ρ_n — n-й корень функции $J_1(g_{1p}a)$], собственная частота исследуемого резонатора при всех θ в точности

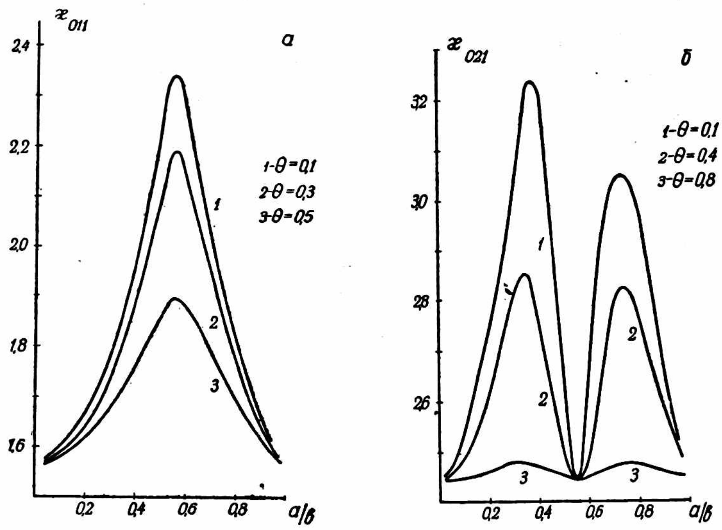

Рис. 3. $\varkappa_{TE_{011}}$ и $\varkappa_{TE_{021}}$ в зависимости от $\frac{a}{b}$ для различных значений θ при $b = L = 1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

равна m-й частоте полого резонатора. Это происходит потому, что внутренний цилиндр (на котором должно выполняться условие равенства нулю поля), оказывается помещенным в нуль поля, т. е. граничное условие выполняется автоматически.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Шинкаренко. Радиотехника, вып. 15. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, 4, 1962.
3. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Изд-во «Советское радио», 1957.