К ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННОГО ТРУБЧАТОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА

Л. А. Поспелов

Харьков

Тонкостенные трубчатые электронные потоки широко применяются в различного рода электровакуумных приборах. В связи с этим им уделяется большое внимание и в теоретической электронной оптике [1]. Разработан общий подход к решению подобного рода задач механики на основе построения инвариантно-групповых решений управляющей системы уравнений [2—4] или использования в качестве независимых переменных траекторий частиц потока [5—6]. Однако эти методы весьма сложны при практической их реализации и ограничены по классу траекторий, к которым они могут быть приложимы.

Для целого ряда трубчатых потоков можно разработать сравнительно простой метод последовательных приближений, который приводит к системе интегральных уравнений или к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих численное решение на современных электронно-вычислительных машинах известными методами численного счета. Вся задача разбивается на следующие этапы. Вначале исследуется исходное приближение к искомому решению, в качестве которого используется решение для бесконечно тонкого потока. Предположения о бесконечно малой толщине стенки потока позволяет исключить одну из независимых переменных и для случая симметричного потока свести задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Конечная толщина потока учитывается методом последовательных приближений по малому параметру — отношению толщины потока к его протяженности.

Настоящее сообщение посвящено первой части задачи — сведению исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе интегральных уравнений для нескольких функций, каждая из которых зависит от одной и той же переменной — расстояния вдоль траектории. Рассмотрены две геометрии потока — трубчатый цилиндрический и плоский слоистый потоки.

В качестве исходной используем гидродинамическую систему уравнений нерелятивистского потока

$$\vec{v}\nabla\vec{v} = -\frac{e}{m}(\overset{\circ}{\vec{E}} + \vec{E});$$

$$\nabla\rho\vec{v} = 0;$$

$$\nabla\varphi = -4\pi\rho, \qquad (1)$$

где v — вектор скорости элементов объема;

ρ — плотность заряда электронов и ионов;

$\bar{E} = -\nabla\varphi$ — напряженность поля пространственного заряда электронов и ионов;

$\overset{\circ}{\vec{E}}$ — заданное электростатическое поле внешних источников.

Предполагается, что на некоторой гладкой поверхности заданы граничные условия для величин $\vec{v}$, ρ, $\vec{E}$, φ. Вместо третьего уравнения системы (1) ниже будет использоваться его решение

$$\varphi = \int\limits_{V_0} dV \frac{\rho}{R}, \tag{2}$$

где V_0 — область пространства, занятая зарядами

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{3}$$

x', y', z' — переменные интегрирования).

Для случая плоской симметрии можно считать

$$v_z = 0; \; \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Предположение о бесконечно тонком потоке дает

$$\rho = \rho_0(x)\,\delta\,[y \pm f(x)], \tag{4}$$

если поток симметричен относительно плоскости $y = 0$, или

$$\rho = \rho_0(x) = \delta\,[y \pm f_1(x)],$$

если он не симметричен. Далее для простоты анализа будем использовать соотношение (4). Обобщение на случай несимметричного потока не представляет трудности, однако несколько усложняет выкладки. С учетом (4), соотношение (2) удобно представить в виде

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-, \tag{5}$$

где

$$\varphi_\pm = \sum_k \int\limits_{x_1(k)}^{x_2(k)} dx' \rho(x') R_\pm(x, x', y).$$

Здесь $x_1^{(k)}$ и $x_2^{(k)}$ — начало и конец k-й петли тока. $R_\pm$ удобно определять для ограниченного вдоль z ($|z| \ll L$), но достаточно широкого потока $\left(\frac{L}{r_1} \gg 1\right)$,

где

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y \pm y(x')^2}.$$

Для этого случая

$$R_\pm(x, x', y) \approx 2 A r \operatorname{sh} \frac{L}{r_1}.$$

С учетом соотношения (4) уравнение непрерывности можно представить в виде

$$\frac{\rho_0(x)}{\rho_0(0)} = \frac{v_x(0)}{v_x(x, y)\,|_{y=f(x)}}. \tag{6}$$

На линии тока при $y = f(x)$

$$v_y = v_x \frac{d}{dx} f(x);$$

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} = v_x \frac{d}{dx}.$$

Это позволяет уравнение движения привести к виду с обыкновенными производными. Однократное интегрирование их дает

$$\frac{v_x^2}{2}-\frac{v_x^2(0)}{2}=-\frac{e}{m}\left\{\int_0^x \overset{\circ}{E}_x(x, f(x))\,dx+\right.$$

$$\left.+4\int_0^x dx\sum_{i,\,k,\,\pm}\int_{x_1^{(i)}}^{x_2^{(i)}} dx'\rho_0(x')\frac{L(x-x')}{L^2+(x-x')^2+[f_{i(x)}\pm f_{k(x')}]^2}\right\}; \tag{7}$$

$$\frac{v_y^2}{2}-\frac{v_y^2(0)}{2}=-\frac{e}{m}\left\{\int_0^x dx\frac{dt}{dx}\overset{\circ}{E}_y(x, f(x))+\right.$$

$$\left.+4\int_0^x dx\frac{df}{dx}\sum_{i,\,k,\,\pm}\int_{x_1^{(i)}}^{x_2^{(i)}} dx'\rho_0(x')\frac{L[f_i(x)\pm f_k(x')]}{L^2+(x-x')^2+[f_i(x)\pm f_k(x')]^2}\right\}, \tag{8}$$

где суммирование вида $\sum\limits_{\pm}$ означает, что необходимо взять сумму выражений со знаком (+) перед f_k под интегралом и со знаком (—).

Траектория электрона определяется соотношением

$$f(x)=y(0)+\int_0^x dx'\frac{v_y(x', f(x'))}{v_x(x', f(x'))}, \tag{9}$$

где $v_x(x, f(x))$ и $v_y(x, f(x))$ определяются уравнениями (7) и (8).

Для случая аксиально-симметричного потока используем цилиндрические координаты (r, z, ψ) и считаем, что зависимость от угла ψ соответствует $v_\psi=0$, $\frac{\partial}{\partial\psi}\vec{v}=0$.

Соотношение (4) перепишется следующим образом:

$$\rho=\rho_0(z)\,\delta(r-f(z)). \tag{10}$$

Решение (2) для этого случая можно представить в виде

$$\varphi(r, z)=\sum_k\int_{z_1^{(k)}}^{z_2^{(k)}} dz'\rho_0(z')f(z')\,\tau(r, z, r', z')\,|_{r'=f'(z')}, \tag{11}$$

где

$$\tau=\int_0^{2h}\frac{d\psi}{R}=\frac{2h}{\sqrt{2rr'}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(4n-1)(2n-1)]!!}{(8n^2)!!}\left[\frac{2rr'}{(z-z')^2+r^2+r'^2}\right]^{2n+1};$$

$z_1^{(k)}$ и $z_2^{(k)}$ определяют начало и конец k-й петли тока. Траектория движения электрона определяется соотношением

$$f(z)=r(0)+\int_0^z dz\frac{v_r}{v_z}\frac{df(z)}{dz}, \tag{12}$$

где $v_r(z)$ и $v_z(z)$ определяются как первые интегралы уравнений движения:

$$\frac{v_z^2}{2} - \frac{v_z^2(0)}{2} = -\frac{e}{m}\int_0^z dz \left\{ \overset{\circ}{E}_z + \pi \sum_k \int_{z_1^{(k)}}^{z_2^{(k)}} dz' \rho_0(z') f(z') \times \right.$$

$$\left. \times \frac{z(z-z')}{[2f(z)f(z')]^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(4n-1)(2n-1)]!!}{(8n^2)!!} \left[\frac{2f(z)f(z')}{(z-z')^2+f^2(z)+f^2(z')}\right]^{2n+3} \right. \qquad (13)$$

$$\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_r^2(0)}{2} = -\frac{e}{m}\int_0^z dz \frac{df}{dz} \left\{ \overset{\circ}{E}_r(z, f(z)) + \right.$$

$$+ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_k \int_{z_1^{(k)}}^{z_2^{(k)}} dz' \rho_0(z') - \sqrt{\frac{df}{dz}\frac{1}{f^3(z)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(4n-1)(2n-1)]!!}{(8n^2)!!} \times$$

$$\left. \times \left[1 + (4n+1)\frac{f^2(z) - f^2(z') - (z-z')^2}{f^2(z) + f^2(z') + (z-z')^2}\right] \left[\frac{2f(z)f(z')}{(z-z')^2+f^2(z)+f^2(z')}\right]^{2n+1} \right\}.$$

Полученные системы уравнений (7—9) и (12—14) являются искомыми. Совместное решение каждой из них дает вид траектории и распределение скоростей на них, т. е. — полное решение задачи при любом заданном распределении внешнего поля. Система (7—9) описывает движение плоского потока. Предположение о том, что потенциал пространственного заряда не зависит от координаты эквивалентно тому, что рассмотрение годится лишь для узкой полосы потока вблизи плоскости $z = 0$. Это предположение исключает расходимость интеграла (2) при $L \to \infty$. Для цилиндрического потока к этому приближению нет необходимости прибегать.

Рассмотренное приближение тонкостенного потока можно отнести к реальному трубчатому потоку только тогда, когда силы пространственного заряда, действующие внутри одной и той же стенки, не являются определяющими. Это бывает в том случае, если толщина стенки значительно меньше расстояния между стенками для плоского потока и диаметра потока для случая аксиальной симметрии.

Системы уравнений (7—9) и (12—14) не поддаются аналитическому решению.

Решение их численными методами для заданных конфигураций внешнего поля, а также построения последовательных приближений применительно к потоку с конечной толщиной стенок явится предметом последующего сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Алямовский. Электронные пучки и электронные пушки. Изд-во «Советское радио», 1966.

2. Л. В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. АН СССР, Новосибирск, 1962.

3. С. Н. Огородников. К теории однокомпонентных потоков одноименно заряженных частиц. «Радиотехника и электроника», 12, (№ 9), 1962.

4. В. А. Сыровой. О некоторых точных решениях уравнений стационарного моноэнергетического пучка заряженных частиц. ПМТФ,№ 4 (1962); № 3 (1963); № 6, (1965).

5. В. Т. Овчаров. Аксиально-симметричные пучки заданной формы. ДАН СССР, 107 (№ 1), 47, (1956).

6. В. Т. Овчаров. О потенциальном движении заряженных частиц. «Радиотехника и электроника», 4, (№ 10), (1959).