РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЯХ, БЛИЗКИХ К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ

Л. К. Гал, Н. А. Хижняк

Харьков

При рассеянии электромагнитных волн на тонких стержнях произвольного поперечного сечения основной интерес представляет вычисление электрического и магнитного векторов Герца:

$$\vec{\Pi}^{э} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{E}\left(\vec{r}'\right) f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right) d\vec{r}'; \tag{1}$$

$$\vec{\Pi}^{м} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}\left(\vec{r}'\right) f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\right) d\vec{r}', \tag{2}$$

через которые выражаются рассеянные поля. Для очень тонких стержней $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ выражения (1) — (2) приводятся к виду

$$\vec{\Pi}^{э} = \hat{g}\vec{E}_0\left(\vec{r}_n\right) f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}_n\right|\right), \quad \vec{\Pi}^{м} = \hat{p}\vec{H}_0\left(\vec{r}_n\right) f\left(\left|\vec{r} - \vec{r}_n\right|\right),$$

где $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ — невозмущенное электромагнитное поле. Вычисление матриц $\hat{g}$ и $\hat{p}$ для стержней более сложной геометрии, чем эллиптическая, и произвольной анизотропии по ε и μ и представляет собой основную задачу настоящего сообщения. Для анизотропных диэлектрических стержней эллиптического сечения эти результаты были получены в работе [1].

Рассмотрим задачу о рассеянии электромагнитных волн на стержнях, близких к эллиптическим.

Пусть на поверхности эллиптического цилиндра задан вектор $\vec{\xi}\left(\vec{\rho}\right)$, характеризующий деформацию поперечного сечения цилиндра. Предположим также, что $|\xi| \ll b$ при $a > b$ и $|\xi| \ll a$ при $a < b$ (a и b —

полуоси эллипса). В результате подобной деформации площадь поперечного сечения рассеивающего цилиндра остается неизменной, т. е.

$$\oint_l \left[\vec{\xi}\, d\vec{l}\right] = 0, \tag{3}$$

а поперечное сечение приобретает геометрию, близкую к эллипсу.

Из (3) следует, что вектор деформации можно искать в виде

$$\vec{\xi} = \operatorname{grad} \Phi,$$

где Φ — функция деформаций.

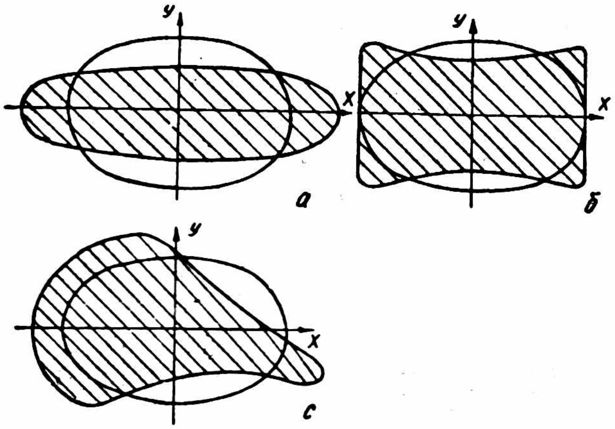
Цилиндры с простейшими поперечными сечениями, близкими к эллипсу, имеют геометрию, описываемую следующими функциями:

$$\Phi = \eta\,(x^2 - y^2); \tag{4}$$

$$\Phi = \eta\,(3x^2y - y^3); \tag{5}$$

$$\Phi = \eta\,[x^3 + y^3 - 3\,(x^2y + xy^2)]. \tag{6}$$

Поперечные сечения данных цилиндров представлены на рис. (*a*, *b*, *c*).



Определим внутренние поля и потенциалы Герца для цилиндров, деформация поперечного сечения которых задана функциями (4), (5).

1. Построение внутреннего поля деформированного цилиндра

В квазистатическом приближении поля $\vec{E}\left(\vec{\rho}\right)$, $\vec{H}\left(\vec{\rho}\right)$ внутри эллиптического цилиндра определяются следующими уравнениями:

$$\vec{E}_\perp\left(\vec{\rho}\right) = \vec{E}_{0\perp}\left(\vec{\rho}\right) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_S \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{E}\left(\vec{\rho}\,'\right)\ln\frac{1}{\left|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'\right|}\,d\vec{\rho}\,';$$

$$\vec{H}_\perp\left(\vec{\rho}\right) = \vec{H}_{0\perp}\left(\vec{\rho}\right) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_S \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}\left(\vec{\rho}\,'\right)\ln\frac{1}{\left|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'\right|}\,d\vec{\rho}\,', \tag{7}$$

решения которых имеют вид

$$\vec{E}^{(0)}\left(\vec{\rho}\right) = \hat{\alpha}\vec{E}_0, \quad \vec{H}^{(0)}\left(\vec{\rho}\right) = \hat{\beta}\vec{H}_0. \tag{8}$$

Элементы матриц α_{ik}, β_{ik} представлены в работе [1]. Вычисление матриц α_{ik}, β_{ik} для цилиндров с деформированными поперечными сечениями может быть выполнено в виде разложения по малому параметру $\frac{\eta}{a}$. В данной работе ограничимся членами линейными по $\frac{\eta}{a}$. Поле внутри цилиндра представим в виде

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(0)\prime}, \tag{9}$$

где $\vec{E}^{(0)}$ — внутреннее поле эллиптического цилиндра;

$\vec{E}^{(0)\prime}$ — добавка, обусловленная отклонением геометрии поперечного сечения от эллипса.

Из уравнения, определяющего поле $\vec{E}$, можем выделить уравнение относительно $\vec{E}^{(0)}$ с известным решением (8) и уравнение относительно $\vec{E}^{(0)\prime}$, имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(0)\prime}(\vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \int\limits_{S_0} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right) \vec{E}^{(0)\prime} \ln \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} d\vec{\rho}' + \\ + \frac{1}{2\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \int\limits_{S_1} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right) \vec{E}^{(0)} \ln \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} d\vec{\rho}', \end{aligned} \tag{10}$$

где S_0 — площадь эллипса;

S_1 — площадь, обусловленная деформацией.

Из (10) видно, что уравнение, определяющее добавку, вызванную деформацией, является аналогичным известному уравнению (7) для эллиптического цилиндра, но с более сложным свободным членом. Свободный член перепишем в виде интегралов по площади эллипса

$$\begin{aligned} \int\limits_{S_1} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right) \vec{E}^{(0)} \ln \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} d\vec{\rho}' = \int\limits_{l} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right) \vec{E}^{(0)} \times \\ \times \ln \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} \left[\xi d\vec{l}\right] = - \int\limits_{S_0} \vec{\xi} \left(\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right) \vec{E}^{0} \times \right. \\ \left. \times \nabla \ln \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} \right) d\vec{\rho}' - \int\limits_{S_0} \left(\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right) \vec{E}^{0} \nabla \right) \vec{\xi} \ln \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} d\vec{\rho}' + \\ + \int\limits_{S_0} (\vec{\xi} \nabla) \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right) \vec{E}^{(0)} \ln \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} d\vec{\rho}'. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение уравнения (7) известно, поэтому задача сводится к нахождению свободного члена для заданных функций деформации Ф. Легко заметить, что вектор, определяемый данным соотношением (11), имеет компоненты, являющиеся функциями декартовых координат, причем, наивысшая степень равна степени функции $\Phi(x, y)$. Поэтому деформация типа (4) приводит к постоянной добавке $\vec{E}^{(0)\prime}$, деформации типа (5), (6) — линейной относительно декартовых координат и т. д. Следовательно, для деформации типа (4) решением уравнения (10) является

$$\vec{E}^{(0)\prime} = \hat{\gamma}\vec{E}_0, \tag{12}$$

где

$$\gamma_{11} = \frac{2\eta}{\Delta}\left\{\frac{b}{a+b}\left[1 + \frac{a}{a+b}\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1} - 1\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1} - 1\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\,\alpha_{11} + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}\alpha_{21}\right] + \frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}\alpha_{11} + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1} - 1\right)\alpha_{21}\right]\right\};$$

$$\gamma_{12} = \frac{2\eta}{\Delta}\left\{\frac{b}{a+b}\left[1 + \frac{a}{a+b}\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1} - 1\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1} - 1\right)\alpha_{12} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}\alpha_{22}\right] + \frac{ab}{(a+b)^2}\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}\alpha_{12} + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1} - 1\right)\alpha_{22}\right]\right\};$$

$$\gamma_{21} = -\frac{2\eta}{\Delta}\left\{\frac{a}{a+b}\left[1 + \frac{b}{a+b}\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1} - 1\right)\right]\cdot\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}\alpha_{11} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1} - 1\right)\alpha_{21}\right] + \frac{ab}{(a+b)^2}\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1} - 1\right)\alpha_{11} + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}\alpha_{21}\right]\right\};$$

$$\gamma_{22} = -\frac{2\eta}{\Delta}\left\{\frac{a}{a+b}\left[1 + \frac{b}{a+b}\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1} - 1\right)\right]\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}\alpha_{12} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1} + 1\right)\alpha_{22}\right] + \frac{ab}{(a+b)^2}\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1} - 1\right)\alpha_{12} + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}\alpha_{22}\right]\right\}.$$

(Элементы матрицы α_{ik} и Δ определены в работе [1]). Полное внутреннее поле деформированного цилиндра можно записать в виде

$$\vec{E}^{(0)}(\vec{\rho}) = (\hat{\alpha} + \hat{\gamma})\,\vec{E}_0.$$

Для деформаций типа (5), (6) внутреннее поле представим следующим образом:

$$\begin{aligned} E_i^{(0)} &= \sum_{k=1}^{2}\alpha_{ik}E_{0k} + (A_i'x + B_i'y)\,e_i; \\ H_i^{(0)} &= \sum_{k=1}^{2}\beta_{ik}H_{0k} + (C_i'x + D_i'y)\,e_i. \end{aligned} \tag{13}$$

Вторые слагаемые (13) представляют линейную относительно декартовых координат добавку. Коэффициенты A_i', B_i', C_i', D_i' определяются из уравнения (10) с линейными свободными членами. Интересно отметить, что эти уравнения аналогичны уравнениям, определяющим внутреннее поле эллиптического цилиндра в первом по $\frac{a}{\lambda}$ приближении, но имеют отличные свободные члены. Таким образом, решение уравнения (10) нам известно, надо лишь заменить приведенные в этой работе свободные члены на

$$\varkappa_{xx} = 12\eta\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}E_x^0 + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1} - 1\right)E_y^0\right]\frac{ab}{(a+b)^2};$$

$$\varkappa_{xy} = \varkappa_{yx} = 6\eta\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1} - 1\right)E_x^0 + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}E_y^0\right]\frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2};\quad \varkappa_{yy} = -\varkappa_{xx}.$$

Магнитные составляющие находим по электрическим заменой ε_{ik} на μ_{ik}, $\vec{E}$ на $\vec{H}$.

2. Потенциалы Герца

Определим электрический и магнитный потенциалы Герца. Известно, что если рассеивающим телом является анизотропный диэлектрический эллиптический цилиндр, то для двухмерного дипольного рассеяния потенциалы Герца можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_g^{э} &= -\frac{i}{4}\int\limits_S \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}^{(0)}(\vec{\rho}')\,d\vec{\rho}';\\ \vec{\Pi}_g^{м} &= -\frac{i}{4}\int\limits_S \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1}-1\right)\vec{H}^{(0)}(\vec{\rho}')\,d\rho'.\end{aligned} \tag{14}$$

При рассеянии электромагнитной волны на деформированном цилиндре потенциалы Герца будут иметь вид

$$\vec{\Pi}_g^{э} = -\frac{i}{4}\int\limits_{S_0}\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}^{(0)}(\vec{\rho}')\,d\vec{\rho}' - \frac{i}{4}\int\limits_{S_0}\left[\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}^{(0)\prime} + \right.$$

$$\left. + \left(\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}^{(0)}_{\nu}\nabla\right)\vec{\xi}\,\right]d\vec{\rho}', \tag{15}$$

где второе слагаемое представляет добавку порядка $\frac{\eta}{a}$, обусловленную отклонением геометрии поперечного сечения цилиндра от эллипса. Так как интеграл по площади эллипса от нечетной функции по переменным x, y равен нулю, то отличные от нуля в первом по $\frac{\eta}{a}$ приближении добавки будут лишь в случае, когда функция Φ является четной функцией декартовых координат.

Для деформации типа (4)

$$\vec{\Pi}^{э}_{g\perp} = \hat{g}\vec{E}_0,\quad \vec{\Pi}^{м}_{g\perp} = \hat{p}\vec{H}_0, \tag{16}$$

где

$$g_{11} = -\frac{i\pi ab}{4}\left\{\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)[(1-2\eta)\,\alpha_{12}+\gamma_{12}] + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}[(1-2\eta)\,\alpha_{22}+\gamma_{22}]\right\};$$

$$g_{12} = -\frac{i\pi ab}{4}\left\{\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)[(1-2\eta)\,\alpha_{12}+\gamma_{12}] + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}[(1-2\eta)\,\alpha_{22}+\gamma_{22}]\right\};$$

$$g_{21} = -\frac{i\pi ab}{4}\left\{\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}[(1+2\eta)\,\alpha_{11}+\gamma_{11}] + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)[(1+2\eta)\,\alpha_{21}+\gamma_{21}]\right\};$$

$$g_{22} = -\frac{i\pi ab}{4}\left\{\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}[(1+2\eta)\,\alpha_{12}+\gamma_{12}] + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)[(1+2\eta)\,\alpha_{22}+\gamma_{22}]\right\};$$

$$\Pi^{э}_{gz} = -\frac{i\pi ab}{4}\left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_1}-1\right)E_{0z},\quad \Pi^{м}_{gz} = -\frac{i\pi ab}{4}\left(\frac{\mu_{zz}}{\mu_1}-1\right)H_{0z}.$$

Элементы матрицы p_{ik} получают заменой ε_{ik} на μ_{ik}. Полученные результаты допускают следующую физическую интерпретацию. При решении задачи рассеяния электромагнитных волн на цилиндре конечной длины или на прямоугольной диэлектрической полосе часто используется приближенное рассмотрение. Цилиндр (или прямоугольник в двухмерном случае) заменяется эквивалентным ему в электродинамическом смысле эллипсоидом (полосой эллиптического сечения), для которых известно решение о рассеянии электромагнитной волны. При этом должны сохраняться объем равнозначных фигур и отношение их полуосей. Полученные соотношения свидетельствуют о том, что такая замена справедлива с точностью до величин $\left(\frac{\xi}{a}\right)^2$. Для деформаций типа (5), (6) добавки, отличные от нуля, к потенциалам Герца будут порядка $\left(\frac{\eta}{a}\right)^2$, $\left(\frac{\eta}{a}\right)\left(\frac{a}{\lambda}\right)$.

3. Внутренние поля деформированного цилиндра и потенциалы Герца в приближении $\left(\frac{\eta}{a}\right)\left(\frac{a}{\lambda}\right)$

Аналогично квазистатическому случаю в первом по $\frac{a}{\lambda}$ приближении решение ищем в виде суперпозиции внутреннего поля эллиптического цилиндра и добавки, обусловленной деформацией поперечного сечения. Уравнение, дающее искомую добавку, будет иметь следующий вид:

$$\vec{E}_{\perp}^{(1)'} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{grad\,div}\int\limits_{S_0}\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}^{(1)'}\ln\frac{1}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}\,d\vec{\rho}' +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{grad\,div}\int\limits_{S_1}\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}^{(1)}\ln\frac{1}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}\,d\vec{\rho}' -$$
$$-\frac{\mu_1}{2\pi}\int\limits_{S_1}\left[\mathrm{grad}\ln\frac{1}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|},\ \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1}-1\right)\vec{H}^{(0)}\right]d\vec{\rho}' - \frac{k_z}{2\pi k}\times$$
$$\times\int\limits_{S_1}\mathrm{grad}\ln\frac{1}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}\left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_1}-1\right)E_z^{(0)}d\vec{\rho}'. \qquad (17)$$

Для деформаций типа (5), (6) из (17) следует, что свободный член является квадратичной функцией декартовых координат

$$I = (\alpha_{11}x^2+\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2+\alpha_{00})\,\vec{i} + (\beta_{11}x^2+\beta_{12}xy+\beta_{22}y^2+\beta_{00})\,\vec{j}.$$

Следовательно, решение уравнения (17) ищем в виде полинома второй степени

$$\vec{E}_{\perp}^{(1)'} = (A_{11}x^2+A_{12}xy+A_{22}y^2+A_{00})\,\vec{i} + (B_{11}x^2+$$
$$+B_{12}xy+B_{22}y^2+B_{00})\,\vec{j}.$$

Уравнение (17) сводится к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{ik}, B_{ik}, которую можно представить таким образом:

$$\sum_{i,k=0}^{2}\varkappa_{ikml}A_{ik}+\gamma_{ikml}B_{ik}=\alpha_{ml};$$
$$\sum_{i,k=0}^{2}\varkappa'_{ikml}A_{ik}+\gamma'_{ikml}B_{ik}=\beta_{ml}, \qquad (18)$$

где $m, l = 0, 1, 2$. Система (18) отличается лишь свободными членами от соответствующей системы работы [1], определяющей внутреннее поле анизотропного диэлектрического эллиптического цилиндра во втором по $\frac{a}{\lambda}$ приближении. Вычисление этих свободных членов достаточно громоздко; ниже приводится лишь их окончательный вид

$$\alpha_{11} = 18\eta\left\{\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}A_1 + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)A_2\right]^2\frac{2a^2b}{(a+b)^3} - \left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)B_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}B_2\right]\frac{b(a^2+b^2)}{(a+b)^3}\right\} + 3\eta(\mu_{zz}-\mu_1)H_z^{(0)}\cdot\frac{a(a^2+3b^2)}{(a+b)^3};$$
$$\alpha_{22} = -\alpha_{11},$$
$$\beta_{12} = 2\alpha_{22}$$
$$\alpha_{00} = 6\eta\left\{\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}A_1 + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)A_2\right]a^2b\frac{(2b-a)}{(a+b)^2} + \right.$$
$$\left.+\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)B_1 + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}B_2\right]\left[\frac{ab}{2} + \frac{ab^2(b-2a)}{(a+b)^2}\right]\right\} +$$
$$+3\eta(\mu_{zz}-\mu_1)H_z^0\left[\frac{ab}{2} - \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}\right];$$
$$\beta_{11} = 18\eta\left\{\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)A_1 + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}A_2\right]\frac{a(a^2+b^2)}{(a+b)^3} + \left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}B_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)B_2\right]\frac{2ab^2}{(a+b)^3}\right\} - 3\eta\frac{k_z}{k}\left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_1}-1\right)E_z^0\frac{b(a-b)^2}{(a+b)^3};$$
$$\beta_{22} = -\beta_{11};$$
$$\alpha_{12} = 2\beta_{11};$$
$$\beta_{00} = 6\eta\left\{\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)A_1 + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}A_2\right]\left[\frac{ab}{2} + \frac{a^2b(a-2b)}{(a+b)^2}\right] + \left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}B_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)B_2\right]\frac{ab^2(b-2a)}{(a+b)^2}\right\} - 3\eta\frac{k_z}{k}\left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_1}-1\right)E_z^{(0)}\left[\frac{ab}{2} - \frac{2ab^3}{(a+b)^2}\right].$$

Полученные результаты позволяют сделать следующий вывод: если функция деформации $\Phi(x, y)$ является полиномом степени n, то добавка к полю, обусловленная этой деформацией, находится из системы линейных алгебраических уравнений, определяющих внутреннее поле эллиптического цилиндра в n приближении по $\frac{a}{\lambda}$ заменой свободных членов, обусловленных падающей волной на свободные члены, полученные для данной деформации.

Продольная составляющая внутреннего поля деформированного цилиндра будет иметь следующий вид:

$$E_z^{(1)} = (A_3x + B_3y) + (C_{11}x^2 + C_{12}xy + C_{22}y^2 + C_{00}), \tag{19}$$

(значения A_3, B_3 приведены в работе [1]);

$$C_{11} = -6\eta\frac{k_z}{k}\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}E_x^{(0)} + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)E_y^{(0)}\right]\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{k_z}{2k}\left\{\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)A_1' + \right.\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}A_2'\right]\frac{b(2a+b)}{(a+b)^2} + \left.\left[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}B_1' + \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\right)B_2'\right]\frac{b^2}{(a+b)^2}\right\} + \frac{\mu_1}{2}\left\{\left[\frac{\mu_{yx}}{\mu_1}C_1' + \right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mu_{yy}}{\mu_1}-1\right)C_2'\right]\frac{b(2a+b)}{(a+b)^2} - \left.\left[\left(\frac{\mu_{xx}}{\mu_1}-1\right)D_1' + \frac{\mu_{xy}}{\mu_1}D_2'\right]\frac{b^2}{(a+b)^2}\right\};$$
$$C_{12} = -6\eta\frac{k_z}{k}\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)E_x^{(0)} + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}E_y^{(0)}\right]\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} + \frac{k_z}{k}\left\{\left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\right)B_1' + \right.\right.$$

$$+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}B_2'\Big]\frac{b^2}{(a+b)^2}+\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}A_1'+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)A_2'\Big]\frac{a^2}{(a+b)^2}+\mu_1\Big\{\Big[\frac{\mu_{yx}}{\mu_1}D_1'+$$

$$+\Big(\frac{\mu_{yy}}{\mu_1}-1\Big)D_2'\Big]\frac{b^2}{(a+b)^2}-\Big[\Big(\frac{\mu_{xx}}{\mu_1}-1\Big)C_1'+\frac{\mu_{xy}}{\mu_1}C_2'\Big]\frac{a^2}{(a+b)^2}\Big\};$$

$$C_{22}=6\eta\frac{k_z}{k}\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}E_x^{(0)}+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)E_y^{(0)}\Big]\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{k_z}{2k}\Big\{\Big[\Big(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\Big)A_1'+$$

$$+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}A_2'\Big]\frac{a^2}{(a+b)^2}+\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}B_1'+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)B_2'\Big]\frac{a\,(2b+a)}{(a+b)^2}\Big\}+\frac{\mu_1}{2}\Big\{\Big[\frac{\mu_{yx}}{\mu_1}C_1'+$$

$$+\Big(\frac{\mu_{yy}}{\mu_1}-1\Big)C_1'\Big]\frac{a^2}{(a+b)^2}-\Big[\Big(\frac{\mu_{xx}}{\mu_1}-1\Big)D_1'+\frac{\mu_{xy}}{\mu_1}D_2'\Big]\frac{a\,(a+2b)}{(a+b)^2}\Big\};$$

$$C_{00}=-3\eta\frac{k_z}{k}\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}E_x^{(0)}+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)E_y^{(0)}\Big]\frac{ab\,(b-a)}{a+b}-$$

$$-\frac{k_z}{2k}\Big\{\Big[\Big(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\Big)A_1'+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}A_2'\Big]\frac{a^2b}{(a+b)^2}+\Big[\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}B_1'+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)B_2'\Big]\frac{ab^2}{(a+b)^2}-$$

$$-\frac{\mu_1}{2}\Big\{\Big[\frac{\mu_{yx}}{\mu_1}C_1'+\Big(\frac{\mu_{yy}}{\mu_1}-1\Big)C_2'\Big]\frac{a^2b}{(a+b)^2}-\Big[\Big(\frac{\mu_{xx}}{\mu_1}-1\Big)D_1'+\frac{\mu_{xy}}{\mu_1}D_2'\Big]\frac{ab^2}{(a+b)^2}\Big\}.$$

Потенциалы Герца деформированного цилиндра в $\left(\frac{\eta}{a}\right)\left(\frac{a}{\lambda}\right)$-приближении запишем следующим образом:

$$\Pi_x=-\frac{i\pi ab}{4}\Big[\Big(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\Big)\Big(A_{11}\frac{a^2}{4}+A_{22}\frac{b^2}{4}+A_{00}\Big)+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}\Big(B_{11}\frac{a^2}{4}+$$

$$+B_{22}\frac{b^2}{4}+B_{00}\Big)\Big]-\frac{i\pi ab}{16}3\eta\Big\{\Big[\Big(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\Big)B_1+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}B_2\Big](a^2-3b^2)-$$

$$-\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}A_1+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)A_2\Big]2a^2\Big\}+\frac{i\pi ab^3}{16}\frac{k_\perp}{k}\Big[\Big(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\Big)B_1'+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}B_2'\Big]+$$

$$+\frac{i\pi ab}{16}3\eta\frac{k_\perp}{k}\Big[\Big(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\Big)E_x^{(0)}+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}E_y^{(0)}\Big](a^2-3b^2);$$

$$\Pi_y=-\frac{i\pi ab}{4}\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}\Big(A_{11}\frac{a^2}{4}+A_{22}\frac{b^2}{4}+A_{00}\Big)+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)\Big(B_{11}\frac{a^2}{4}+$$

$$+B_{22}\frac{b^2}{4}+B_{00}\Big)\Big]+\frac{i\pi ab}{16}3\eta\Big\{\Big[\Big(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_1}-1\Big)A_1+\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_1}A_2\Big](a^2+b^2)-\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}B_1+$$

$$+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)B_2\Big]2b^2+\frac{i\pi ab^3}{16}\frac{k_\perp}{k}\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}B_1'+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)B_2'\Big]+$$

$$+\frac{i\pi ab^3}{8}\frac{k_\perp}{k}3\eta\Big[\frac{\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_1}E_x^{(0)}+\Big(\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1}-1\Big)E_y^{(0)}\Big].$$

Литература

1. Л. К. Гал, Н. А. Хижняк. Тезисы докладов Юбилейной научно-технической конференции. Харьков, 1970, стр. 25—27.