

МЕТОД ИНТЕГРАЛА КОШИ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Г. Ш. Кеванишвили

Т б и л и с и

В данной работе предложен новый метод (который может быть назван методом интеграла Коши) для решения отдельных частных задач теории дифракции волн.

При помощи этого метода в первом разделе изложено новое решение задачи дифракции плоской Е-поляризованной электромагнитной волны на проводящем бесконечно длинном цилиндре с круглым поперечным сечением. Попутно излагается обоснование предложенного метода.

Во втором параграфе решена задача дифракции плоской Е-поляризованной электромагнитной волны на периодической решетке из идеально проводящих тонких лент.

В третьем параграфе дается решение задач дифракции на периодической решетке из круглых бесконечно длинных цилиндров и на системе, образованной из двух зеркально симметричных цилиндров. Решение дифракционных задач третьего параграфа имеет самостоятельный интерес, так как в строгой постановке эти задачи пока не решены.

1. Дифракция на цилиндре

Как известно [1], при дифракции плоской Е-поляризованной электромагнитной волны на бесконечно длинном, идеально проводящем цилиндре, с круглым поперечным сечением коэффициенты A_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) рассеянного поля удовлетворяют разложению вида

$$-e^{-i\alpha \cos \xi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(2)}(\alpha) e^{im\xi}, \quad (1)$$

где $\alpha = ka$; a — радиус цилиндра; $k = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны; ξ — полярный угол; $0 \leq \xi \leq 2\pi$; коэффициенты A_m подлежат определению.

Прежде чем приступить к нахождению коэффициентов A_m новым методом, рассмотрим предварительно более общее, чем (1), разложение вида

$$-F(\alpha, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m Z_m(\alpha, \xi), \quad (2)$$

где функции $F(\alpha, \xi)$ и $Z_m(\alpha, \xi)$ считаются заданными, параметр $\alpha > 0$, а ξ изменяется в заданном интервале действительной оси $[\xi_1, \xi_2]$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если а) функция $F(\omega, \xi)$ аналитична в некоторой замкнутой односвязной области $\{D\}$ комплексного переменного ω и непрерывна на границе Γ этой области,

б) ряд

$$G(\omega, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m(\alpha, \xi) f_m(\omega), \quad \omega \in \{D\}, \quad (3)$$

где $f_m(\omega)$ произвольная, аналитическая в $\{D\}$ функция, сходится равномерно; тогда разложение (2) существует.

Для доказательства теоремы представим коэффициенты A_m в виде интеграла Коши:

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Phi(\omega) f_m(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega, \quad (4)$$

где $\Phi(\omega)$ — неизвестная функция, а контур Γ охватывает точку $\omega = \alpha$.

Подставляя (4) в (2), в силу условия б) теоремы получаем

$$-F(\alpha, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Phi(\omega) G(\omega, \xi)}{\omega - \alpha} d\omega.$$

Это функциональное уравнение по отношению $\Phi(w)$, которое, согласно условию а) теоремы, имеет элементарное решение $\Phi(w) = F(w, \xi)/G(w, \xi)$, после подстановки которого в (4) находим

$$A_m = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F(w, \xi) f_m(w) dw}{(w - \alpha) G(w, \xi)}. \quad (5)$$

Простой подстановкой убеждаемся, что (5) удовлетворяет разложению (2) и действительно является его решением; таким образом, теорема доказана.

Пусть теперь функция $G(w, \xi)$ в точках $w = w_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$) обладает нулями целого порядка, а точки $w = w_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, M$) являются точками ее ветвления, тогда, когда контур Γ охватывает все указанные выше точки, вместо (5) получаем

$$A_m = -\frac{f_m(\alpha) F(\alpha, \xi)}{G(\alpha, \xi)} + \sum_{\nu=1}^N \text{Res } Q(w_\nu, \xi) + \\ + (1/2\pi i) \sum_{\mu=1}^M \int_{C_\mu^\pm} Q(w, \xi) dw, \quad (6)$$

где через $Q(w, \xi)$ мы обозначили подынтегральную функцию в (5), а C_μ^\pm — разрезы, проведенные в плоскости w для выделения однозначных ветвей подынтегральной функции.

Помножим теперь обе части (6) на функцию $G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi)$, где $T_m(\alpha, \xi) \sim Z_m^*(\alpha, \xi)$, причем $Z_m^*(\alpha, \xi)$ комплексно сопряжена с $Z_m(\alpha, \xi)$ функцией, и проинтегрируем полученный результат по ξ от ξ_1 до ξ_2 , после чего найдем

$$A_m = -f_m(\alpha) \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi} + \\ + \frac{1}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi} \left\{ \sum_{\nu=1}^N \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) \times \right. \\ \times \text{Res } Q(w_\nu, \xi) d\xi + \\ \left. - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^M \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) \left[\int_{C_\mu^\pm} Q(w, \xi) dw \right] d\xi \right\}. \quad (7)$$

Необходимо одно замечание, необходимое для дальнейших расчетов: в конкретных задачах дифракции параметр α пропорционален характерному размеру дифрагирующего тела, причем при беспредельном уменьшении этого размера эффект рассеяния от него ослабляется и при $\alpha = 0$ исчезает совсем; следовательно, решение (7) должно быть подчинено условию

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_m = 0. \quad (8)$$

Полагая, что подынтегральные функции $F(\alpha, \xi)$, $T_m(\alpha, \xi)$ и $f_m(\alpha)$ остаются конечными при $\alpha \rightarrow 0$, условие (8) будет соблюдено, если в (7) $G(\alpha, \xi) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Действительно, предполагая, что подынтегральные функции в правой части (7) непрерывны по отношению к переменной ξ , согласно теореме о среднем значении, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi &= G(\alpha, \xi_0) T_m(\alpha, \xi_0) (\xi_2 - \xi_1) \rightarrow \infty \text{ при } \alpha \rightarrow 0; \\ \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) \operatorname{Res} Q(\omega, \xi) d\xi &= \\ &= G(\alpha, \xi_0) T_m(\alpha, \xi_0) \operatorname{Res} Q(\omega, \xi_0) (\xi_2 - \xi_1) \rightarrow \infty \text{ при } \alpha \rightarrow 0; \\ \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) \left[\int_{C_{\mu}^{\pm}} Q(\omega, \xi) d\omega \right] d\xi &= \\ &= G(\alpha, \xi_0) T_m(\alpha, \xi_0) \left[\int_{C_{\mu}^{\pm}} Q(\omega, \xi_0) d\omega \right] (\xi_2 - \xi_1) \rightarrow \infty \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \end{aligned}$$

($\xi_1 < \xi_0 < \xi_2$)

Теперь легко убеждаемся, что в правой части (7) при $\alpha \rightarrow 0$ исчезает только первое слагаемое, второе остается ограниченным и условие (8) уже не будет выполнено. Деформируя теперь в (5) контур интегрирования таким образом, что все нули и особые точки функции $G(\omega, \xi)$ оказались вне его, вместо (7) имеем

$$A_m = -f_m(\alpha) \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi / \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi. \quad (9)$$

В силу произвольности функции $f_m(\alpha)$ выражение (9) не дает нам однозначного определения коэффициентов A_m ; в связи с этим возникает естественная задача об однозначном представлении этих коэффициентов и, следовательно, разложения (2). К решению данной задачи мы и переходим сейчас.

Помножим обе части равенства (2) на введенную выше вспомогательную функцию $T_n(\alpha, \xi)$, где n — произвольное целое число, и проинтегрируем полученный результат по ξ от ξ_1 до ξ_2 . В предположении справедливости изменения порядков интегрирования и суммирования в правой части (2) получим

$$\Phi_n(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m Y_{mn}(\alpha), \quad (10)$$

где

$$\Phi_n(\alpha) = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\alpha, \xi) T_n(\alpha, \xi) d\xi; \quad (11)$$

$$Y_{mn}(\alpha) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} Z_m(\alpha, \xi) T_n(\alpha, \xi) d\xi. \quad (12)$$

В дальнейшем назовем (10) усредненным разложением n -го порядка, которое сопоставляется с основным разложением (2). Обозначим далее через $A_m^{(n)}$ решение усредненного разложения (10) и будем искать значение коэффициентов A_m из (9) среди коэффициентов $A_m^{(n)}$.

При построении аналитической формы для коэффициентов $A_m^{(n)}$ мы должны руководствоваться тем, что при $\Phi_n(\alpha) \equiv 0$ коэффициенты $A_m^{(n)}$ также

должны быть тождественно равны нулю. С физической точки зрения это естественное требование соответствует тому очевидному факту, что при отсутствии падающего на препятствие первичного излучения (т. е. при $\varphi_n(\alpha) \equiv 0$) должен отсутствовать и эффект рассеяния (т. е. $A_m^{(n)} \equiv 0$).

После этого замечания представим коэффициенты $A_m^{(n)}$ в виде интеграла Коши:

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Phi_n(\omega) \varphi_m(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (10) и предполагая, что функция $\varphi_n(\omega)$ аналитична внутри контура Γ и непрерывна на нем, а также, что ряд

$$G(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_{mn}(\alpha) \varphi_m(\omega) \quad (14)$$

сходится равномерно внутри и на границе Γ , для функции $\Phi_n(\omega)$ находим $\Phi_n(\omega) = -\varphi_n(\omega)/G(\omega)$.

В предположении, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_n(\alpha) < \infty$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n(\alpha) = \infty$ из (13) находим

$$A_m^{(n)} = -\varphi_n(\alpha) \varphi_m(\alpha)/G_n(\alpha). \quad (15)$$

Учитывая далее, что

$$G_n(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} Z_m(\alpha, \xi) T_n(\alpha, \xi) d\xi \right] \varphi_m(\alpha) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} G_1(\alpha, \xi) T_n(\alpha, \xi) d\xi,$$

где

$$G_1(\alpha, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m(\alpha, \xi) \varphi_m(\alpha),$$

выражение (15) переписывается так:

$$A_m^{(n)} = -\varphi_m(\alpha) \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\alpha, \xi) T_n(\alpha, \xi) d\xi / \int_{\xi_1}^{\xi_2} G_1(\alpha, \xi) T_n(\alpha, \xi) d\xi.$$

При $n = m$ это выражение совместно с (9) является решением основного разложения (2), и для однозначного представления его следует положить $A_m \equiv A_m^{(m)}$, т. е.

$$f_m(\alpha) \equiv \varphi_m(\alpha) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi.$$

Теперь задачу об однозначном представлении разложения (2) можно считать решенной.

Вернемся к разложению (1), где

$$F(\alpha, \xi) = -e^{-i\alpha \cos \xi}, \quad Z_m(\alpha, \xi) = H_m^{(2)}(\alpha) e^{im\xi},$$

и следовательно,

$$G(\alpha, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\alpha) H_n^{(2)}(\alpha) e^{in\xi},$$

Выбрав в качестве вспомогательной функции $T_m(\xi) = e^{-im\xi}$ и положив $\xi_1 = 0$ и $\xi = 2\pi$, находим

$$f_m(\alpha) = - \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha \cos \xi - im\xi} d\xi = -2\pi i^m J_m(\alpha);$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\xi) d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\alpha) H_n^{(2)}(\alpha) \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\xi} d\xi = 2\pi f_m(\alpha) H_m^{(2)}(\alpha)$$

и, согласно (9), получаем известное релеевское решение [1]:

$$A_m = -i^m J_m(\alpha) / H_m^{(2)}(\alpha).$$

Дифракция на решетке из лент

Рассмотрим теперь задачу дифракции плоской E -поляризованной электромагнитной волны на периодической решетке из идеально проводящих тонких лент. На рис. 1 показана выбранная система координат и расположение в ней решетки.

Набегающая плоская волна $E_1 = e^{ikx}$ на поверхностях лент возбуждает токи, становящиеся источником переизлученной волны, z -я компонента напряженности электрического поля которой равна

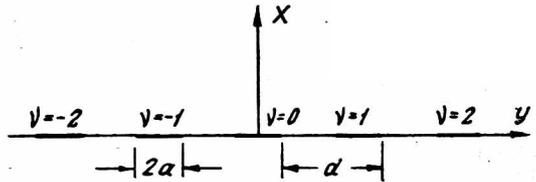


Рис. 1. Металлическая решетка из лент; $2a$ — ширина лент; d — период решетки.

$$E_z = C \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{\infty} J(y') \frac{e^{-ikR(q, x, y, y', z, z')}}{R(q, x, y, y', z, z')} dz' dy', \quad (16)$$

где C — некоторая постоянная; $\nu = q$ — номер ленты; $J(y')$ — плотность поверхностного тока на ленте; x, y, z — координаты точки наблюдения; y', z' — координаты точки на ленте с номером $\nu = q = 0$; $2a$ — ширина лент;

$$R(q, x, y, y', z, z') = [x^2 + (y - y' - qd)^2 + (z - z')^2]^{1/2};$$

d — период решетки.

Принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikR}}{R} dz' = i\pi H_0^{(2)}(k \sqrt{x^2 + (y - y' - qd)^2})$$

и учитывая равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k \sqrt{x^2 + (y - y' - qd)^2}) = \\ & = -i\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi m d^{-1} y - 2\pi |x| d^{-1} \sqrt{m^2 - D^2}}}{\sqrt{m^2 - D^2}}, \end{aligned}$$

($D \doteq d/\lambda$, λ — длина волны) вместо (16) получаем

$$E_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \frac{e^{i2\pi m d^{-1} y - 2\pi |x| d^{-1} \sqrt{m^2 - D^2}}}{\sqrt{m^2 - D^2}}, \quad (17)$$

где

$$A_m = -iC\pi \int_{-a}^{+a} J(y') e^{-i2\pi my' d^{-1}} dy'.$$

Вспользуемся теперь граничным условием на поверхности ленты:

$$E_1 + E_2 = 0 \text{ при } y = y' \text{ и } x = 0,$$

тогда A_m должны быть коэффициентами следующего разложения:

$$-1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \frac{e^{i2\pi mad^{-1}\xi}}{\sqrt{m^2 - D^2}}. \quad (18)$$

$$(\xi = y'/a, -1 < \xi < +1)$$

Сравнивая (18) с (2), устанавливаем, что в рассматриваемом случае

$$F(\alpha, \xi) = 1, \quad Z_m = \frac{e^{i\alpha m \xi}}{\sqrt{m^2 - D^2}}, \quad G(\alpha, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\alpha) \frac{e^{i\alpha n \xi}}{\sqrt{n^2 - D^2}}.$$

$$(\alpha = 2\pi ad^{-1})$$

Выбрав теперь вспомогательную функцию в виде $T_m(\alpha, \xi) = e^{-i\alpha m \xi}$, получаем

$$f_m(\alpha) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} e^{-i\alpha m \xi} d\xi = -2 \frac{\sin \alpha a}{\alpha a};$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\alpha, \xi) T_m(\alpha, \xi) d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n(\alpha)}{\sqrt{n^2 - D^2}} \int_{-1}^{+1} e^{i\alpha(m-n)\xi} d\xi =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n(\alpha) \sin[(n-m)a]}{(n-m)\sqrt{n^2 - D^2}}$$

и, согласно (9), окончательно

$$A_m = - \frac{(\sin(\alpha m)/m)^2}{\frac{\alpha \sin(\alpha m)}{m \sqrt{m^2 - D^2}} + \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(\alpha s) \sin[(s-m)a]}{s(s-m)\sqrt{s^2 - D^2}}}.$$

Заметим, что из выражения поля (17) следует, что амплитуды дифракционного спектра рассеянной волны выражаются как

$$B_m = \frac{A_m}{\sqrt{m^2 - D^2}} = - \frac{(\sin(\alpha m)/m)^2}{\frac{\alpha \sin(\alpha m)}{m} + \sqrt{m^2 - D^2} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(\alpha s) \sin[(s-m)a]}{s(s-m)\sqrt{s^2 - D^2}}}, \quad (19)$$

откуда коэффициент отражения (R) решетки по зеркальному лучу будет иметь следующий вид:

$$R = B_0 = - \frac{1}{1 + i2D \left(\frac{d}{2\pi a}\right)^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha s)}{s^2 \sqrt{s^2 - D^2}}}. \quad (20)$$

На рис. 2, 3, 4 приведены кривые зависимости модуля коэффициента отражения $|R|$ от параметра D при различных отношениях $2a/d$, заимствованные из работ [2, 3]. На этих же рисунках жирными точками нанесены

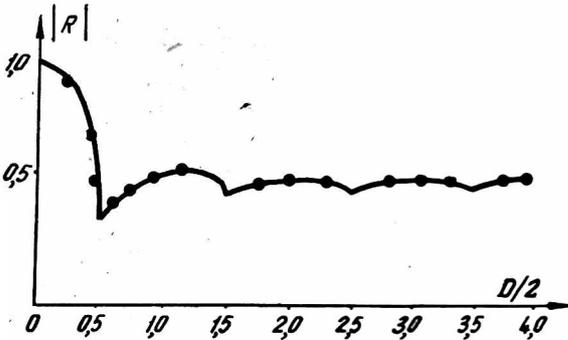


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от D (2 при половинном заполнении решетки).

результаты, вычисленные по формуле (20). Сравнение наших результатов с результатами цитированных работ, в пределах графической точности, указывает на хорошее согласие между ними.

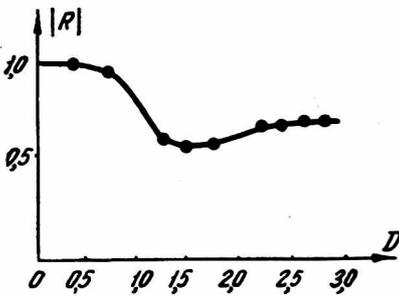


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от D при $2a/d = 0,65$.

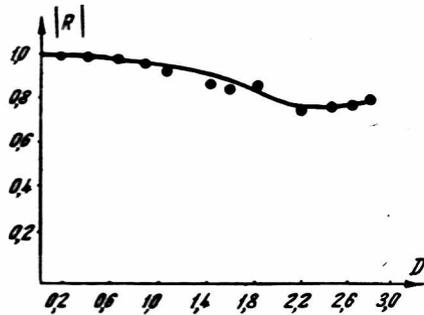


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения от D при $2a/d = 0,8$.

Интересно отметить, что при $D = m$, т. е. когда в рассеянной волне рождается новая, распространяющаяся по оси x , без затухания, гармоника, ее амплитуда, как это следует из (19), равна $|B_m| = \sin \alpha m / m \alpha$ ($m = D$).

3. Дифракция на решетке из цилиндров

В работе [6] показано, что при падении плоской звуковой волны на периодической решетке из бесконечно длинных и мягких цилиндров круглого сечения дифрагированное звуковое поле давления $p(r)$ выражается как

$$y(r) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr_q) \exp(im\varphi_q),$$

где A_m — неизвестные коэффициенты; q — номер цилиндра в решетке, смысл величин r_q и φ_q можно усмотреть из рис. 5, $H_m^{(1)}(kr_q)$ — функции Ганкеля; $k = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны в однородной среде, в которую погружена решетка.

Граничное условие, которому удовлетворяют коэффициенты, имеет вид

$$-e^{-iacos\xi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(\alpha) e^{im\xi} + \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq 0}}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr_q^{(0)}) \exp(im\xi_q^{(0)}), \quad (21)$$

где $\alpha = ka$; $r_q^{(0)} = (a^2 + q^2 d^2 - 2aqd \cos \xi)^{1/2}$; a — радиус цилиндра; $0 \leq \xi \leq 2\pi$; a — период решетки; значение угла $\xi_q^{(0)}$ указано на рис. 6.

Усредненное разложение порядка n , которое сопоставляется с разложением (21), имеет следующий вид [6]:

$$H_n^{(1)}(\alpha) A_n^{(n)} + i^n J_n(\alpha) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m Z_{mn}(\beta) + i^n J_n(\alpha) = 0, \quad (22)$$

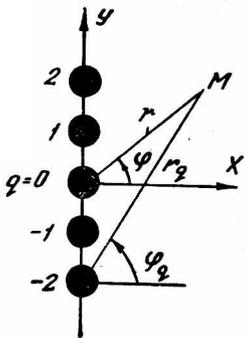


Рис. 5. Решетка, образованная из цилиндров.

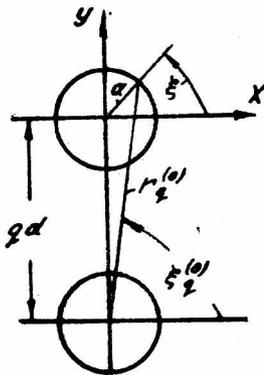


Рис. 6. Значение угла $\xi_q^{(0)}$

где $\beta = kd$; $J_n(\alpha)$ — функция Бесселя;

$$Z_{mn} = i^{m-n} \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq 0}}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(\beta q).$$

Коэффициенты $A_m^{(n)}$, фигурирующие в (22), находим по формуле (15), где

$$\varphi_n(\alpha) = i^n J_n(\alpha); \quad G_n(\alpha) = [H_n^{(2)}(\alpha) + G_n^*(\alpha)] \varphi_n(\alpha);$$

$$G_n^*(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m Z_{mn}(\beta) J_m(\alpha). \quad (23)$$

Полагая теперь в (15) $n = m$, получаем с учетом (23)

$$A_m = - \frac{i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(\alpha) + (-1)^m \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq 0}}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s J_s(ka) H_{s-m}^{(1)}(\beta q)}. \quad (24)$$

Применение теоремы сложения о цилиндрических функциях [7]

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s J_s(\alpha) H_{s-m}^{(1)}(\beta q) = (-1)^m H_m^{(1)}[k(a + qd)] \quad (\alpha = ka)$$

приводит (24) к более простому выражению

$$A_m = - \frac{i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka) + \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq 0}}^{\infty} H_m^{(1)}[k(qd + a)]} \quad (25)$$

В заключение заметим, что формула (25) справедлива и в электродинамической задаче дифракции плоской E -поляризованной волны на решетке из идеально проводящих цилиндров при условии, что $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$, где ϵ и μ электрические параметры среды, а ω — частота поля.

Дифракция на двух зеркально симметричных цилиндрах

Если на два зеркально симметричных цилиндра нормально падает плоская E -поляризованная электромагнитная волна, рассеянное поле можно представить в следующем виде:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \{ H_m^{(1)}(kr) e^{im\varphi} + H_m^{(1)}(kr_1) e^{im\varphi_1} \}.$$

Значения r , φ , r_1 и φ_1 показаны на рис. 7. Можно показать, следуя предыдущему параграфу, что усредненное граничное условие снова выражается соотношением (22), где теперь

$$Z_{mn} = i^{m-n} H_{m-n}^{(1)}(kd),$$

причем, d — расстояние между осями цилиндров и следовательно, искомые коэффициенты A_m поля выражаются как

$$A_m = - \frac{i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka) + H_m^{(1)}[k(a+d)]}. \tag{26}$$

(a — радиус цилиндра).

Заметим, что второе слагаемое в знаменателе этого выражения соответствует эффекту взаимодействия цилиндров, который при $d \rightarrow \infty$ исчезает и выражение (26) переходит в известную формулу $A_m = -i^m J_m(ka)/H_m^{(1)}(ka)$ для одиночного цилиндра.

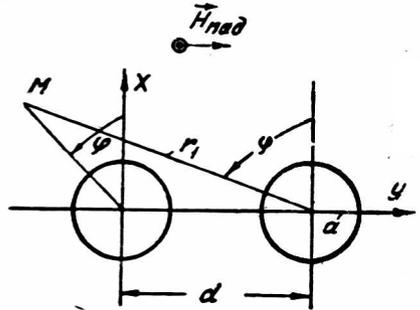


Рис. 7. Система из зеркально симметричных цилиндров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестфаль. Теория дифракции. Изд-во «Мир», 1964.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, т. XXXII, вып. 4, 1962.
3. Л. А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации. Изд-во «Советское радио», 1966.
4. G. L. Baldwin, A. E. Heins. Math. scand., 2, № 1, 103, 1954.
5. В. В. Малин. «Радиотехника и электроника», т. 8, № 2, 1962.
6. Г. Ш. Кеванишвили. VI Всесоюзная Акустическая конференция (рефераты докладов). Москва, 1968.
7. И. С. Градштейн, Н. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.