РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА УСЕЧЕННОМ ЦИЛИНДРЕ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА R-ФУНКЦИЙ

В. Ф. Кравченко, В. И. Полевой, В. Л. Рвачев

Харьков

Пусть на бесконечно длинный идеально проводящий цилиндр радиуса R, усеченный плоскостями $z = \pm a$, падает плоская волна, направление распространения которой перпендикулярно оси цилиндра и составляет угол α

с осью x (рис. 1). Тогда пространственная задача дифракции сводится к двумерной задаче в плоскости xz, а электромагнитная векторная задача — к двум скалярным краевым задачам для различных направлений поляризации.

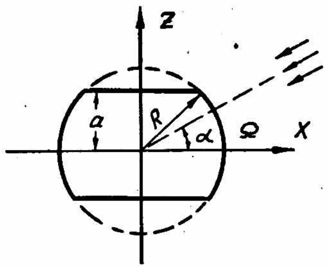

Рис. 1.

1. Случай E-поляризации

Для компонент поля в данном случае

$$\vec{E} = (0,\ u,\ 0);\quad \vec{H} = \frac{c}{i\omega\mu}\left(-\frac{\partial u}{\partial z};\ 0;\ \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Поле падающей волны единичной амплитуды имеет вид

$$u_0 = \exp\left[-ik\left(x\cos\alpha + z\sin\alpha\right)\right]. \qquad (1)$$

Искомое поле представим в виде

$$u = u_0 + u_p(x,\ z), \qquad (2)$$

где $u_p(x,\ z)$ — поле, рассеянное в результате дифракции.

Поле u_p должно удовлетворять следующим условиям:

а) волновому уравнению

$$\Delta u_p + k^2 u_p = 0 \text{ в области } \Omega; \qquad (3)$$

б) краевому условию

$$u_p|_\Gamma = -u_0|_\Gamma; \qquad (4)$$

в) условию излучения в двумерном случае

$$\lim \sqrt{r}\left(\frac{\partial u_p}{\partial r} - iku_p\right) = 0; \qquad (5)$$

г) условию ограниченности энергии в любой конечной области, включая окрестность ребра.

Следуя работе [1], точное решение будем искать в виде

$$u_p = -\frac{u_0}{1+\omega^2} - \frac{\omega}{(1+\omega^2)^{1/2}}\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)\exp ik\sqrt{x^2+z^2}, \qquad (6)$$

где $\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)$ — неизвестная функция;

$\omega(x,\ z)$ — координатная функция, удовлетворяющая условиям $\omega(x, z)/_\Gamma = 0$; $\omega(x,\ z) > 0$ во внешней области Ω;

$\omega(x,\ z) = r + 0(1)$ при $r \to \infty$.

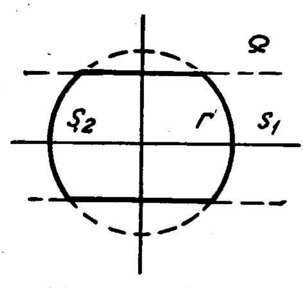

Рис. 2.

При таком выборе функции $\omega(x,\ z)$ простой подстановкой нетрудно проверить, что поле u_p в виде (6) удовлетворяет условиям (4) и (5) при любом выборе функции $\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)$.

Для построения функции $\omega(x,\ z)$, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям, используем аппарат R-функций [2]. Область Ω может быть задана предикатом (рис. 2):

$$F = f_1 \wedge_\alpha f_2 = -\left(f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}\right) =$$

$$= 2z^2 + x^2 - R^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - z^2)^2 + (R^2 - x^2 - z^2)^2 - 2\alpha\,(a^2 - z^2)(R^2 - x^2 - z^2)},$$

где $f_1 = a^2 - z^2 \geqslant 0$ (полоса $|z| < a$);

$f_2 = R^2 - x^2 - z^2 \geqslant 0$ (внутренность круга радиуса R). При таком выборе функция F будет положительна во всей внешней области Ω и равна нулю на границе Γ.

Для удовлетворения последнему условию $\omega = r + 0(1)$ при $r \to \infty$, выберем $\omega(x, z)$ в виде

$$\omega(x, z) = \frac{F}{\sqrt{1+F}} =$$

$$= \frac{2z^2 + x^2 - R^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - z^2)^2 + (R^2 - x^2 - z^2)^2 - 2\alpha(a^2 - z^2)(R^2 - x^2 - z^2)}}{\sqrt{1 + 2z^2 + x^2 - R^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - z^2)^2 + (R^2 - x^2 - z^2)^2 - 2\alpha(a^2 - z^2)(R^2 - x^2 - z^2)}}}. \tag{7}$$

Легко убедиться, что $\omega(x, z)$ в виде (7) удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Подставляя (6) в (2), для поля u окончательно получаем

$$u = u_0 - \frac{u_0}{1 + \omega^2} - \frac{\omega}{(1 + \omega^3)^{1/2}} \Phi\left(\frac{x}{1+\omega}; \frac{z}{1+\omega}\right) \exp ik\sqrt{x^2 + z^2}. \tag{8}$$

Функцию $\Phi\left(\frac{x}{1+\omega}; \frac{z}{1+\omega}\right)$ ищем в виде следующего приближения:

$$\Phi(x, z) = \sum_{l+k=0}^{n} C_{lk} P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right), \tag{9}$$

где $P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right)$; $P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right)$ — полиномы Лежандра.

Поле в виде (8) удовлетворяет граничным условиям и условиям на бесконечности при любых коэффициентах C_{lk} в разложении (9). Относительно условия на ребре можно сделать следующие замечания: так как все функции, входящие в (6), ограничены и непрерывны, данное условие можно представить в виде

$$\lim \rho \operatorname{grad} u_p = 0, \tag{10}$$

где ρ — радиус цилиндрического валика, охватывающего точки ребра.

Смещая начало координат в одну из точек ребра (точку a, $\sqrt{R^2 - a^2}$) и охватывая ее валиком радиуса ρ, убеждаемся, что при $\rho \to 0$ $\omega \sim \rho$. Учитывая далее ограниченность всех остальных функций, входящих в (6), можно считать, что условие (10) выполняется.

Постоянные C_{lk} разложения (9) находятся из требования наилучшего удовлетворения волновому уравнению одним из вариационных методов. В данном случае используем метод Ритца в применении к наименьшим квадратам [4]. Учитывая комплексность коэффициентов C_{lk}, функционал выбираем в следующем виде:

$$\mathrm{I} = \iint_{\Omega} \frac{L(u) L(u^*)}{1 + \omega} dx\, dz, \tag{11}$$

где $L(u) = \Delta u + k^2 u$; $L(u^*) = \Delta u^* + k^2 u^*$.

Вес $1 + \omega$ взят для обеспечения лучшей сходимости.

Выделяя в (8) действительную и мнимую часть, получим

$$u = u_д + i u_м;$$

$$u_д = \cos kr_0 - \frac{\cos kr_0}{1 + \omega^2} - \frac{\omega}{(1 + \omega^3)^{1/2}} \sum_{l+k=0}^{n} (A_{lk} \cos kr - B_{lk} \sin kr) \times$$

$$\times P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right);$$

$$u_м = -\sin kr_0 + \frac{\sin kr_0}{1+\omega^2} - \frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} \sum_{i+k=0}^{n} (A_{ik} \sin kr + B_{ik} \cos kr) \times$$
$$\times P_i\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right), \quad (12)$$

где $r_0 = x \cos\alpha + z \sin\alpha$; $r = \sqrt{x^2+z^2}$; $C_{ik} = A_{ik} + iB_{ik}$. Учитывая, что $\Delta(u_д + iu_м) = \Delta u_д + i\Delta u_м$, функционал (11) преобразуем к виду

$$I = \iint_{\Omega} \frac{[(\Delta u_д + k^2 u_д)^2 + (\Delta u_м + k^2 u_м)^2]}{1+\omega} dx\, dz. \quad (13)$$

В выражении (13)

$$(\Delta u_д + k^2 u_д)^2 = F_1^2 + F_1 \sum_{i+k=0}^{n} A_{ik}\Phi_{ik} - F_1 \sum_{i+k=0}^{n} B_{ik}\psi_{ik} +$$
$$+ F_1 \sum_{s+m=0}^{n} A_{sm}\Phi_{sm} - F_1 \sum_{s+m=0}^{n} B_{sm}\psi_{sm} + \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} A_{ik}A_{sm}\Phi_{ik}\Phi_{sm} -$$
$$- \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} B_{ik}A_{sm}\psi_{ik}\Phi_{sm} - \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} A_{ik}B_{sm}\Phi_{ik}\psi_{sm} +$$
$$+ \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} B_{ik}B_{sm}\psi_{ik}\psi_{sm}. \quad (14)$$

$$(\Delta u_м + k^2 u_м)^2 = F_2^2 - F_2 \sum_{i+k=0}^{n} A_{ik}\psi_{ik} - F_2 \sum_{i+k=0}^{n} B_{ik}\Phi_{ik} - F_2 \sum_{s+m=0}^{n} A_{sm}\psi_{sm} -$$
$$- F_2 \sum_{s+m=0}^{n} B_{sm}\Phi_{sm} + \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} A_{ik}A_{sm}\psi_{ik}\psi_{sm} + \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} B_{ik}A_{sm}\Phi_{ik}\psi_{sm} +$$
$$+ \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} A_{ik}B_{sm}\psi_{ik}\Phi_{sm} + \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} B_{ik}B_{sm}\Phi_{ik}\Phi_{sm}, \quad (15)$$

где $F_1 = L\left(\frac{\cos kr_0}{1+\omega^2}\right) = \Delta\left(\frac{\cos kr_0}{1+\omega^2}\right) + k^2 \frac{\cos kr_0}{1+\omega^2}$;

$$F_2 = L\left(\frac{\sin kr_0}{1+\omega^2}\right) = \Delta\left(\frac{\sin kr_0}{1+\omega^2}\right) + k^2 \frac{\sin kr_0}{1+\omega^2};$$
$$\Phi_{ik} = L\left[\frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} \cos kr P_i\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right)\right];$$
$$\psi_{ik} = L\left[\frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} \sin kr\, P_i\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right)\right].$$

Подставляя (14) и (15) в (13), а затем производя группировку и почленное интегрирование, получим следующее выражение для функционала:

$$I = Q + \sum_{i+k=0}^{n} A_{ik}\alpha_{ik} - \sum_{i+k=0}^{n} B_{ik}\beta_{ik} + \sum_{s+m=0}^{n} A_{sm}\alpha_{sm} - \sum_{s+m=0}^{n} B_{sm}\beta_{sm} +$$
$$+ \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} (A_{ik}A_{sm} + B_{ik}B_{sm})\gamma_{iksm} + \sum_{i+k=0}^{n} \sum_{s+m=0}^{n} (A_{ik}B_{sm} - B_{ik}A_{sm})\sigma_{iksm}, \quad (16)$$

где

$$Q=\iint\limits_{\Omega}\frac{F_1^2+F_2^2}{1+\omega}\,dx\,dz;$$

$$\alpha_{ik}=\iint\limits_{\Omega}\frac{(F_1\Phi_{ik}-F_2\psi_{ik})}{1+\omega}\,dx\,dz;\quad \beta_{ik}=\iint\limits_{\Omega}\frac{(F_1\psi_{ik}+F_2\Phi_{ik})}{1+\omega}\,dx\,dz;$$

$$\gamma_{iksm}=\iint\limits_{\Omega}\frac{(\Phi_{ik}\psi_{sm}+\psi_{ik}\Phi_{sm})}{1+\omega}\,dx\,dz;\quad \sigma_{iksm}=\iint\limits_{\Omega}\frac{(\psi_{ik}\Phi_{sm}-\Phi_{ik}\psi_{sm})}{1+\omega}\,dx\,dz.$$

Исследуя функционал (16) на минимум по действительной и мнимой части искомых коэффициентов, получим

$$\sum_{i+k=0}^{n}A_{ik}\gamma_{iksm}-\sum_{i+k=0}^{n}B_{ik}\sigma_{iksm}=-\alpha_{sm};$$

$$\sum_{i+k=0}^{n}A_{ik}\sigma_{iksm}+\sum_{i+k=0}^{n}B_{ik}\gamma_{iksm}=\beta_{sm}. \tag{17}$$

Совместное решение системы алгебраических уравнений (17) дает возможность определить действительные и мнимые части коэффициентов C_{ik}, а следовательно, и дифрагированное поле.

2. Случай H-поляризации

Для компонент поля в этом случае

$$\vec{H}=(0,\ u,\ 0);\ \vec{E}=\frac{c}{iwe}\left(\frac{\partial u}{\partial x};\ 0;\ -\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Искомое поле представим в виде

$$u=u_0+u_p(x,\ z).$$

Рассеянное поле u_p должно удовлетворять граничному условию

$$\left.\frac{\partial u_p}{\partial \nu}\right|_{\Gamma}=-\left.\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right|_{\Gamma}, \tag{18}$$

где ν — внешняя нормаль к поверхности дифрагирующего тела. Кроме того, u_p должно удовлетворять условиям (3) и (5) и условию на ребре (см. п. 1).

Согласно [1], решение выбираем в виде

$$u_p=\Phi_0+A[\Phi], \tag{19}$$

где $A[\Phi]$ — линейный дифференциальный оператор;

$$\Phi_0=-\frac{\omega D_1 u_0}{(1+\omega)(1+\omega)^2}=-\frac{\omega}{(1+\omega)(1+\omega^2)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right);$$

$$A[\Phi]=\frac{\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)}{(1+\omega^2)^{1/2}}\exp ik\sqrt{x^2+z^2}-\frac{\omega}{(1+\omega^2)^{1/2}}D_1\left[\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp ik\sqrt{x^2+z^2}\right].$$

Входящая в (19) функция $\omega(x, z)$ должна удовлетворять следующим условиям: $\omega(x, z)\Big|_\Gamma = 0$; $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = 1$; $\omega(x, z) > 0$ во внешней области Ω; $\omega = r + 0(1)$ при $r \to \infty$.

Если выполняются все требования, накладываемые на $w(x, z)$, функция u_p удовлетворяет условиям (3), (5) и (18) при любом выборе функции $\Phi\left(\frac{x}{1+\omega}; \frac{z}{1+\omega}\right)$.

Для построения функции $\omega(x, z)$ используем аппарат R-функций. Разделим границу Γ (рис. 3) на несколько частей Γ_1, Γ_1', Γ_2. Нормали к этим границам запишутся в виде следующих векторов:

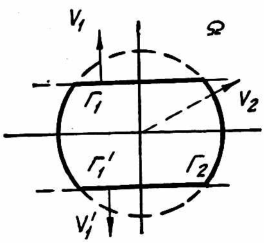

Рис. 3.

$$\vec{\nu}_1 = \vec{j};\quad \vec{\nu}_1' = -\vec{j};\quad \vec{\nu}_2 = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} = \frac{x}{R}\vec{i} + \frac{z}{R}\vec{j},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные векторы соответственно к осям x и z.

Рассмотрим области

$f_1 = z^2 - a^2 \geqslant 0$ (вся плоскость xz за исключением полосы $|z| < a$);

$f_2 = x^2 + z^2 - R^2 \geqslant 0$ (внешность круга радиуса R).

Пронормируем f_1 и f_2 так, чтобы

$$\frac{\partial f_1}{\partial\nu_1}\Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial f_1}{\partial\nu_1'}\Big|_{\Gamma_1'} = 1;\quad \frac{\partial f_2}{\partial\nu_2}\Big|_{\Gamma_2} = 1. \tag{20}$$

Для этого f_1 и f_2 перепишем в виде

$$f_1 = \frac{1}{2a}(z^2 - a^2) \geqslant 0;\quad f_2 = \frac{1}{2R}(x^2 + z^2 - R^2) \geqslant 0.$$

В таком виде функции f_1 и f_2 будут удовлетворять условию (20). Действительно,

$$\frac{\partial f_1}{\partial\nu_1}\Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial f_1}{\partial z}\Big|_{\Gamma_1} = \frac{2z}{2a}\Big|_{\Gamma_1} = 1;\quad \frac{\partial f_1}{\partial\nu_1'}\Big|_{\Gamma_1'} = -\frac{\partial f_1}{\partial z}\Big|_{\Gamma_1'} = -\frac{2z}{2a}\Big|_{\Gamma_1'} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\nu_2}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f_2}{\partial z}\sin\varphi\Big|_{\Gamma_2} = \frac{x^2 + z^2}{R^2}\Big|_{\Gamma_2} = 1$$

Тогда внешнюю область Ω представим предикатом

$$F(x, z) = \frac{2}{1+\alpha}(f_1 \vee_\alpha f_2) = \frac{2}{1+\alpha}\Big[\frac{1}{2a}(z^2 - a^2) + \frac{1}{2R}(x^2 + z^2 - R^2) +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4a^2}(z^2 - a^2)^2 + \frac{1}{4R^2}(x^2 + z^2 - R^2)^2 - \frac{\alpha}{2aR}(z^2 - a^2)(x^2 + z^2 - R^2)}.$$

Согласно [5], функция $F(x, z)$ должна удовлетворять условиям

$$F(x, z)\Big|_\Gamma = 0;\quad \frac{\partial F(x, z)}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = 1;\quad F(x, z) > 0 \text{ в области } \Omega.$$

Так как $\omega(x, z)$, кроме этих условий должна удовлетворять условию $\omega = r + 0(1)$ при $r \to \infty$, поэтому $\omega(x, y)$ следует взять в виде

$$\omega = \frac{F(x, z)}{\sqrt{1 + F(x, z)}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{1+\alpha}\Big[\frac{1}{2a}(z^2 - a^2) + \frac{1}{2R}(x^2 + z^2 - R^2) + \to \to + \sqrt{\frac{1}{4a^2}(z^2 - a^2)^2 + \frac{1}{4R^2}(x^2 + z^2 - R^2)^2 - \frac{\alpha}{2aR}(z^2 - a^2)(x^2 + z^2 - R^2)}}{\sqrt{1 + \frac{2}{1+\alpha}\Big[\frac{1}{2a}(z^2 - a^2) + \frac{1}{2R}(x^2 + z^2 - R^2) + \to \to + \sqrt{\frac{1}{4a^2}(z^2 - a^2)^2 + \frac{1}{4R^2}(x^2 + z^2 - R^2)^2 - \frac{\alpha}{2aR}(z^2 - a^2)(x^2 + z^2 - R^2)}}}. \tag{21}$$

Таким образом, поле

$$u = u_0 - \frac{\omega D_1 u_0}{(1+\omega)(1+\omega^2)} + \frac{\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)}{(1+\omega^3)^{1/2}} \exp ik\sqrt{x^2+z^2} -$$

$$- \frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} D_1\left[\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)\exp ik\sqrt{x^2+z^2}\right], \qquad (22)$$

где $\omega(x, z)$ описывается выражением (21).

Учитывая свойства оператора D_1 [1], легко убедиться, что поле в виде (22) удовлетворяет граничным условиям, а также условиям на бесконечности. Так как в данном случае $\omega(x, z) \sim \rho$ при $\rho \to 0$, а остальные функции в (22) непрерывны и ограниченны, относительно условия на ребре справедливы те же выводы, что и в п. 1.

Искомую функцию $\Phi\left(\frac{x}{1+\omega};\ \frac{z}{1+\omega}\right)$ представим в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\Phi(x, z) = \sum_{l+k=0}^{n} C_{lk} P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right).$$

Для нахождения коэффициентов C_{lk} используем метод наименьших квадратов. Выбирая функционал в виде (11) и проделывая последовательно все операции, описанные в п. 1, вновь приходим к системе линейных алгебраических уравнений (17) с той лишь разницей, что коэффициенты в данном случае равны

$$\alpha_{sm} = \iint_\Omega \frac{(F_1 H_{sm} - F_2 W_{sm})}{1+\omega}\, dx\, dz;\quad \beta_{sm} = \iint_\Omega \frac{(F_1 W_{sm} + F_2 H_{sm})}{1+\omega}\, dx\, dz;$$

$$\gamma_{lksm} = \iint_\Omega \frac{(W_{lk} W_{sm} + H_{lk} H_{sm})}{1+\omega}\, dx\, dz;\quad \sigma_{lksm} = \iint_\Omega \frac{(W_{lk} H_{sm} - H_{lk} W_{sm})}{1+\omega}\, dx\, dz;$$

$$F_1 = L\left[\frac{\omega}{(1+\omega)(1+\omega^2)} D_1 (\cos kr_0)\right];\quad F_2 = L\left[\frac{\omega}{(1+\omega)(1+\omega^2)} D_1 (\sin kr_0)\right];$$

$$H_{lk} = M_{lk} - \Phi_{lk};\quad W_{lk} = N_{lk} - \psi_{lk};$$

$$M_{lk} = L\left\{\frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} D_1\left[\cos kr\, P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right)\right]\right\};$$

$$N_{lk} = L\left\{\frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} D_1\left[\sin kr\, P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right)\right]\right\};$$

$$\Phi_{lk} = L\left\{\frac{1}{(1+\omega^3)^{1/2}} \cos kr P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right)\right\};$$

$$\psi_{lk} = L\left\{\frac{1}{(1+\omega^3)^{1/2}} \sin kr\, P_l\left(\frac{x}{1+\omega}\right) P_k\left(\frac{z}{1+\omega}\right)\right\},$$

где

$$r_0 = x\cos\alpha + z\sin\alpha;\quad r = \sqrt{x^2+z^2},$$

Система уравнений (17) дает возможность определить амплитуду и фазу дифрагированного поля, а следовательно, все остальные параметры, характеризующие рассеивающий объект (радиолокационный поперечник рассеяния, плотность потока рассеянной мощности, диаграмма направленности по мощности и по полю и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Рвачев, В. Ф, Кравченко. Применение метода R-функций к решению скалярной задачи теории дифракции, ч. I. Сб. «Радиотехника», вып. 13. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.

2. В. Л. Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики, Изд-во «Техника», Киев, 1967.

3. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. Изд-во «Мир», 1964.

4. С. Г. Михлин. Прямые методы в математической физике. Гостехтеориздат, М., 1950.

5. Г. П. Манько, В. Л. Рвачев, Л. И. Шкляров. О построении последовательностей координатных функций при решении задач Дирихле и Неймана для областей сложной формы. «Дифференциальные уравнения», т. 4, № 4, 1968.