АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧ

В. К. Пироженко

Харьков

Связанные электродинамические линии передач применяются в качестве направленных ответвителей, преобразователей и фильтров типов волн, входных и выходных устройств ЛБВ [1] и т. д.

При расчете характеристик подобных систем удобно использовать метод связанных волн, поскольку он позволяет по известным параметрам исходных систем определить свойства всей совокупности связанных линий. Случай связи одномерных линий исследован достаточно подробно [1, 2], однако при распространении результатов анализа одномерных линий на электродинамические системы возникают трудности, связанные с учетом распределения поля в плоскости поперечного сечения рассматриваемых структур. В работе [3] предпринята попытка развить метод связанных волн для объемных линий передач, но анализу волновых уравнений в этой работе не уделено достаточного внимания, поэтому сделать какие-либо выводы о свойствах связанных электродинамических линий довольно трудно. В настоящей статье приводится анализ и решение волновых уравнений для двух связанных объемных передающих линий, позволяющие не только находить постоянные распространения электромагнитных волн в рассматриваемых системах, но и определять изменение структуры поля в линиях, вносимое связью.

Рассмотрим две произвольные связанные объемные направляющие системы. Волновые уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в таких линиях, имеют вид [3]

$$\begin{aligned} &\Delta F_1 + k^2 F_1 + k_{11}^2 F_1 - k_{21}^2 F_2 = 0; \\ &\Delta F_2 + k^2 F_2 + k_{22}^2 F_2 - k_{12}^2 F_1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $F_{1,2}$ — любая составляющая возмущенного связью электромагнитного поля в первой и второй линиях соответственно;
k — волновое число;
k_{11}, k_{22}, k_{21}, k_{12} — коэффициенты связи.

При связи систем посредством щелей, прорезанных в их общих стенках, коэффициенты связи можно определить по формулам работы [4].

Систему уравнений (1) представим следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = -(k^2 + k_{11}^2) F_1 - \Delta_{\xi,\eta} F_1 + k_{21}^2 F_2; \\ &\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} = -(k^2 + k_{22}^2) F_2 - \Delta_{\xi,\eta} F_2 + k_{12}^2 F_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Delta_{\xi,\eta}$ — лапласиан поперечных координат ξ и η.

Полагая, что связь между линиями слабая (коэффициенты $k_{pq}^2 \ll k^2$, $p, q = 1, 2$), будем считать, что при введении связи поперечное распределение поля в рассматриваемых системах изменилось мало, причем эти изменения вызваны как искажением граничных поверхностей, так и взаимным проникновением полей исходных линий через механизм связи. При этом результирующие поля в каждой из связанных систем являются функциями возмущенных собственных полей обеих линий, а доля внесенных полей мала. Иными словами, в связанных системах

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 + \alpha_1 f_2; \\ F_2 &= \alpha_2 f_1 + f_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $f_{1,2}$ — возмущенные собственные поля первой и второй систем соответственно; $\alpha_{1,2}$ — малые коэффициенты.

Действительно, если в связанных линиях поперечное распределение поля изменилось мало, справедливо следующее приближенное равенство:

$$\Delta_{\xi,\eta} F_{1,2} \approx -\varkappa_{1,2}^2 F_{1,2}, \tag{4}$$

где $\varkappa_{1,2}$ — поперечные собственные числа исходных линий.

Подставляя (4) в (2), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} &= -\beta_1^2 F_1 + k_{21}^2 F_2; \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} &= -\beta_2^2 F_2 + k_{12}^2 F_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\beta_{1,2}^2 = k^2 + k_{11,\,22}^2 - \varkappa_{1,2}^2. \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений (5) имеет строгое решение [5]:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{n=1}^{4} A_n(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_n z}; \\ F_2 &= \sum_{n=1}^{4} B_n(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_n z}, \end{aligned} \tag{7}$$

где величины Γ_n представляют собой корни характеристического многочлена уравнений (5), а амплитудные коэффициенты A_n и B_n являются функциями поперечных координат ξ и η. Вид этих функций определяется граничными условиями.

Как видно из выражения (7), поле в двух связанных линиях состоит из четырех бегущих волн — двух прямых и двух обратных. В работе [2] показано, что при достаточном удалении от возбуждающего диполя и при слабой связи между линиями взаимодействие волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях, пренебрежимо мало. Поэтому в нашем случае достаточно рассмотреть только прямые (или обратные) волны; выражения для полей в двух связанных объемных направляющих системах с учетом соотношений между амплитудами волн A_n и B_n, приведенных в [5], запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= A(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_1 z} - r_1 B(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_2 z}; \\ F_2 &= r_2 A(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_1 z} + B(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_2 z}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\Gamma_{1,2} = -\left[-\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 + 4k_{12}^2 k_{21}^2}\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{9}$$

$$r_{1,2} = 2k_{21,\,12}^2 \left[\beta_2^2 - \beta_1^2 + \sqrt{(\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 + 4k_{12}^2 k_{21}^2}\right]^{-1} \tag{10}$$

Проанализируем полученные выражения. При отсутствии связи между системами (коэффициенты связи равны нулю) из (8) получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= A(\xi, \eta)\, e^{-\sqrt{-k^2+\varkappa_1^2}\, z}; \\ F_2 &= B(\xi, \eta)\, e^{-\sqrt{-k^2+\varkappa_2^2}\, z}, \end{aligned} \tag{11}$$

т. е. соблюдается переход к изолированным линиям, причем, в этом случае функции $A(\xi, \eta)$ и $B(\xi, \eta)$ описывают распределение поля в плоскости поперечного сечения первой и второй линий соответственно. Следовательно, при отсутствии связи

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi,\eta} A(\xi, \eta) &= -\varkappa_1^2 A(\xi, \eta); \\ \Delta_{\xi,\eta} B(\xi, \eta) &= -\varkappa_2^2 B(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{12}$$

При введении слабой связи между системами поперечное распределение поля в них изменяется незначительно, поэтому и функции $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ искажаются мало, т. е. равенства (12) выполняются приближенно:

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi,\eta} A(\xi, \eta) &\approx -\varkappa_1^2 A(\xi, \eta); \\ \Delta_{\xi,\eta} B(\xi, \eta) &\approx -\varkappa_2^2 B(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{13}$$

Проверим, насколько согласуется предположение (13) с исходными предпосылками (4). Для этого воздействуем оператором $\Delta_{\xi,\eta}$ на выражения (8). С учетом (13) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi,\eta} F_1 &= -\varkappa_1^2 F_1 + \varphi B(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_2 z}; \\ \Delta_{\xi,\eta} F_2 &= -\varkappa_2^2 F_2 + \psi A(\xi, \eta)\, e^{\Gamma_1 z}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= r_1(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2); \\ \psi &= r_2(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2). \end{aligned}$$

При связи двух систем с достаточно различными электродинамическими свойствами разность $(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2)$ велика и значительно превосходит коэффициенты связи k_{12} и k_{21}. В этом случае из (10) следует, что

$$|r_{1,2}| \ll 1$$

и, следовательно, коэффициенты φ и ψ малы, а их малость в выражениях (14) означает выполнение условия (4).

Если исходные системы обладают близкими электродинамическими свойствами, т. е. $\varkappa_1^2 \to \varkappa_2^2$, то множители φ и ψ снова малы, так как $(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2) \to 0$, и условия (4) не нарушаются.

В промежуточных случаях в коэффициентах φ и ψ превалирующую роль играют величины r_1 и r_2 либо разность $(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2)$ и эти коэффициенты остаются всегда малыми. Иными словами, при малых коэффициентах связи условия (4) и (13) согласуются независимо от свойств исходных систем.

Из выражений (13) следует, что функция $A(\xi, \eta)$ описывает возмущенное связью собственное поперечное распределение поля в первой системе, а функция $B(\xi, \eta)$ — во второй. Если исходные линии тождественны, т. е. $\varkappa_1^2 = \varkappa_2^2$, то функции $A(\xi, \eta)$ и $B(\xi, \eta)$ описывают собственные распределения полей обеих систем. При этом коэффициенты $r_{1,2} = 1$, функция $A(\xi, \eta)$ характеризует синфазную волну, а функция $B(\xi, \eta)$ — противофазную волну в двух идентичных связанных системах. Этот результат хорошо согласуется с выводами работы [6]. По мере расхождения электродинамических свойств систем коэффициенты $r_{1,2}$ уменьшаются. Поля в каждой линии являются функциями возмущенных собственных полей обеих линий, причем доля внесенных полей мала (малы величины $r_{1,2}$), и соотношения (8) и (3) совпадают.

Чтобы полностью решить задачу, помимо постоянных распространения $\Gamma_{1,2}$, определяемых выражением (9), необходимо также знать функции $A(\xi, \eta)$ и $B(\xi, \eta)$. Для их нахождения воспользуемся следующими рассуждениями.

Если два волновода равномерно связаны на некотором участке их длины, то распределения поля, соответствующие типам волн в каждой линии, уже не будут являться нормальными волнами этих волноводов, так как они теперь связаны между собой. Однако имеется новая пара нормальных волн, ортогональных между собой [7]. Одна из них может быть названа синфазной, так как для нее электрические поля в обеих линиях направлены в одну сторону, вторая — противофазной, поскольку для нее электрические поля в каждом волноводе направлены противоположно. Если мощность на входе подана лишь в один волновод, дальнейший переход мощности во вторую линию объясняется тем, что при этом возбуждены обе нормальные волны, которые интерферируют между собой вследствие различия в фазовых скоростях.

Таким образом, анализ свойств двух связанных систем можно производить, используя как метод связанных волн, так и метод нормальных волн. Оба метода взаимосвязаны [8]. Действительно, коэффициенты связи, играющие очень важную роль в методе связанных волн, зависят от геометрии системы связи, т. е. от граничных условий на общей стенке связанных волноводов, а эти же условия (в совокупности с граничными условиями на поверхности исходных систем) определяют пару нормальных волн в рассматриваемой структуре. При нахождении постоянных распространения результаты, полученные обоими методами, полностью эквивалентны [7].

Если проводить анализ методом нормальных волн, т. е. решать непосредственно уравнения Максвелла со сложными условиями на поверхности исследуемой структуры, для волн с постоянными распространения $\Gamma_{1,2}$ функции распределения поля, удовлетворяющие граничным условиям, должны подчиняться соотношению

$$\Delta_{\xi,\eta} f_{1,2} = -(\varkappa'_{1,2})^2 f_{1,2}, \tag{15}$$

где функции $f_{1,2}$ характеризуют распределение поля в плоскости поперечного сечения рассматриваемой системы для синфазной и противофазной волн, а

$$(\varkappa'_{1,2})^2 = k^2 + \Gamma^2_{1,2}. \tag{16}$$

Вид функций $f_{1,2}$ во многих случаях известен. Сложность представляет определение собственных чисел $\varkappa'_{1,2}$ этих функций. Для нахождения величин $\varkappa'_{1,2}$ воспользуемся результатами, полученными с помощью метода связанных волн.

Так как функции $A(\xi, \eta)$ и $B(\xi, \eta)$ также описывают распределение поля в плоскости поперечного сечения и соответствуют волнам с теми же постоянными распространения Γ_1 и Γ_2, можно положить, что

$$f_1 = \begin{cases} A(\xi, \eta) \text{ в первой линии;} \\ r_2 A(\xi, \eta) \text{ во второй линии;} \end{cases} \tag{17}$$

$$f_2 = \begin{cases} -r_1 B(\xi, \eta) \text{ в первой линии;} \\ B(\xi, \eta) \text{ во второй линии.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi,\eta} A(\xi, \eta) &= -(\varkappa_1')^2 A(\xi, \eta); \\ \Delta_{\xi,\eta} B(\xi, \eta) &= -(\varkappa_2')^2 B(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{18}$$

а величины $\varkappa_{1,2}'$ с учетом (16), (9), (6) определяются соотношением

$$(\varkappa_{1,2}')^2 = -\frac{k_{11}^2 + k_{22}^2}{2} + \frac{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 + 4k_{12}^2 k_{21}^2}. \tag{19}$$

Соотношения (19) представляют собой неизвестные в (15) и (16) собственные числа, а выражения (15)—(19) определяют искомые функции $A(\xi, \eta)$ и $B(\xi, \eta)$.

Выражения (18) и (19) не противоречат исходным предпосылкам (4) в случае малости коэффициентов связи. Действительно, пренебрегая в соотношениях (19) коэффициентами связи, находим

$$(\varkappa_{1,2}')^2 \approx \varkappa_{1,2}^2. \tag{20}$$

При выполнении условия (20) выражения (4) и (18) совпадают.

Таким образом, объединяя результаты метода связанных волн и метода нормальных волн при знании коэффициентов связи, параметров исходных систем и вида функции f_1 и f_2, можно довольно просто найти постоянные распространения, а также определить изменение структуры поля в системах, вносимое связью. Степень точности при этом зависит от точности, с которой заданы исходные данные, включая коэффициенты связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. E. Miller. Coupled Wave Theory and Waveguides Applications. Bell Syst. Tech. J., 1954, **33**, 661.

2. У. Люиселл. Связанные и параметрические колебания в электронике. Изд-во иностр. лит., 1963.

3. А. Г. Шеин, В. К. Пироженко. К теории связанных объемных передающих линий. «Радиотехника и электроника», **13**, 6, 1968.

4. В. К. Пироженко. К определению коэффициентов связи в связанных объемных передающих линиях. Сб. «Радиотехника», вып. 15. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.

5. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ч. I. Изд-во «Наука», 1965.

6. П. Е. Краснушкин, Р. В. Хохлов. Пространственные биения в связанных волноводах. ЖТФ, **19**, 8, 1949.

7. A. G. Fox. Wave Coupling by Warped Normal Modes. Bell Syst. Tech. J., 1955, **34**, 823.

8. А. Д. Фокс, С. Е. Миллер, М. Т. Вейс. Свойства ферритов и их применение в диапазоне СВЧ. Изд-во «Советское радио», 1956.