ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КВАНТОВАНИЯ КВАЗИШУМОВЫХ СИГНАЛОВ НА ВЫХОДЕ РАДИОПРИЕМНЫХ УСТРОЙСТВ

Е. В. Рогожкин

В ряде случаев при радиотехнических измерениях появляется необходимость обработки шума и подобных шуму сигналов (или их смеси на выходе радиоприемных устройств с определенной частотной характеристикой. В большинстве таких случаев полезный сигнал лишь незначительно превышает уровень шумов, зачастую же — ниже этого уровня. Таким образом, возникает задача получения корреляционной функции шумов со статистической погрешностью, приближающейся к погрешности идеальной обработки.

Эту задачу можно разрешить с помощью цифровой вычислительной машины при соответствующем выборе параметров квантования: частоты и количества уровней.

Пусть частотная характеристика устройства определяется параллельным LC-контуром, шунтированным сопротивлением R, причем на ширину полосы пропускания этого контура ограничения не накладываются. Комплексное сопротивление такого контура

$$z(\omega) = \frac{R}{1 + iRC\,\dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}}, \qquad (1)$$

где

$$\omega_0^2 LC = 1.$$

Спектральная плотность мощности на выходе в случае «белого» шума на входе пропорциональна

$$z(\omega)|^2 = z(\omega)\, z^*(\omega) = \frac{R^2}{1 + R^2C^2 \frac{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}{\omega^2}}. \qquad (2)$$

Используя теорему Винера — Хинчина, можно написать для коэффициента корреляции, что

$$r(\tau) = \frac{1}{R(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |z(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega, \qquad (3)$$

где

$$R(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |z(\omega)|^2 d\omega.$$

Выражение (3) можно свести к виду

$$r(\tau) = \frac{1}{R(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + \beta^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2} d\omega, \qquad (4)$$

$$\beta = RC = \frac{1}{\delta\omega_0};$$

где $\frac{\delta\omega_0}{2\pi}$ — ширина полосы пропускания на уровне 0,5 по мощности.

Подынтегральная функция $f(\omega)$ порядка $\frac{1}{\omega^2}$ при $|\omega| \to \infty$ и в верхней полуплоскости имеет два полюса в точках

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\beta}\left(\pm\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 1} + i\right). \qquad (5)$$

В этом случае, согласно теории аналитических функций [1]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, d\omega = 2\pi i \left\{ \operatorname*{res}_{\omega=\omega_1} f(\omega) + \operatorname*{res}_{\omega=\omega_2} f(\omega) \right\}; \qquad (6)$$

$$\operatorname*{res}_{\omega=\omega_1} f(\omega) = \frac{\omega_1 e^{i\omega_1\tau}}{2 + 4\beta^2\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)}; \quad \operatorname*{res}_{\omega=\omega_2} f(\omega) = \frac{\omega_2 e^{i\omega_2\tau}}{2 + 4\beta^2\left(\omega_2^2 - \omega_0^2\right)}.$$

После подстановки и преобразований получим

$$r(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\delta\omega_0\tau_0}\left(\cos\omega_0'\tau - \frac{\delta\omega_0}{2\omega_0}\sin\omega_0'\tau\right); \qquad (7)$$

где $\frac{\delta\omega_0}{2\pi}$ — полоса пропускания;

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{\delta^2\omega_0^2}{4};$$

$$\omega_0^2 LC = 1.$$

Для подсчета статистической погрешности при использовании идеального интегратора воспользуемся формулой, выведенной в работе [2] для случая нормального распределения:

$$\sigma^2[r(\tau)] = \frac{2}{\Delta}\int_0^\Delta \left(1-\frac{x}{\Delta}\right)[r^2(x) + r(x+\tau)\,r(x-\tau)]\,dx, \tag{8}$$

где $\Delta = T - \tau$; T — длительность выборки.

Пренебрегая сначала вторым слагаемым в выражении (7), после подстановки в (8) получим

$$\sigma_1^2[r(\tau)] = 2\left\{\left[\frac{1}{\delta\omega_0} - \frac{1-e^{-\delta\omega_0\Delta}}{\delta^2\omega_0^2\Delta^2}\right]\cos^2\omega_0'\tau + \frac{\delta^2}{4\delta\omega_0\Delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta^2}{4\delta^2\omega_0^2\Delta^2}\left[\cos\varphi - e^{-\delta\omega_0\Delta}\cos(\varphi + 2\omega_0'\Delta)\right]\right\}, \tag{9}$$

где $\cos\varphi = -1 + \frac{\delta^2}{4}$.

Учет второго слагаемого в выражении (7) приводит к выражению

$$\sigma^2[r(\tau)] = \left(1 - \frac{\delta^2\omega_0^2}{4\omega_0'^2}\right)\sigma_1^2 - \frac{\delta\omega_0}{\omega_0'\Delta}\int_0^\Delta\left(1-\frac{x}{\Delta}\right)e^{-\delta\omega_0 x}\sin 2\omega_0' x\,dx +$$

$$+ \frac{\delta^2\omega_0^2}{\omega_0'^2\Delta}\cos^2\omega_0'\tau\int_0^\Delta\left(1-\frac{x}{\Delta}\right)e^{-\delta\omega_0 x}dx. \tag{10}$$

И окончательно

$$\sigma^2[r(\tau)] = \left(1 - \frac{\delta^2\omega_0^2}{4\omega_0'^2}\right)\sigma_1[r(\tau)] + \frac{\delta^2\omega_0^2}{\omega_0'^2}\cos^2\omega_0'\tau\left(\frac{1}{\delta\omega_0\Delta} - \frac{1-e^{-\delta\omega_0\Delta}}{\delta^2\omega_0^2\Delta^2}\right) -$$

$$- \frac{\delta\omega_0}{2\omega_0'}\left\{\frac{2\sin\varphi}{\delta\omega_0\Delta} + \frac{\delta^2}{\delta^2\omega_0^2\Delta^2}\left[e^{-\delta\omega_0\Delta}\sin(2\omega_0'\Delta + \varphi) - \sin\varphi\right]\right\}. \tag{11}$$

Для значений $\Delta = \frac{2\pi k}{\omega_0'}$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ выражения (9) и (11) с погрешностью, не превышающей величины порядка δ^4, принимают соответственно вид

$$\delta_{01}^2[r(\tau)] \approx \begin{cases} 1 + r^2(\tau), & \Delta = 0 \\ 2\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)\left(\frac{1}{\delta\omega_0\Delta} - \frac{1-e^{-\delta\omega_0\Delta}}{\delta^2\omega_0^2\Delta^2}\right); \end{cases} \tag{12}$$

$$\sigma_0^2[r(\tau)] \approx \begin{cases} 1 + r^2(\tau), & \Delta = 0 \\ 2\left(\frac{1}{\delta\omega_0\Delta} - \frac{1-e^{-\delta\omega_0\Delta}}{\delta^2\omega_0^2\Delta^2}\right). \end{cases} \tag{13}$$

При замене непрерывной функции ее дискретными значениями статистическая погрешность рассчитывается по формуле [2]

$$\sigma_g^2\left[r\left(\frac{T}{N}m\right)\right] = \frac{1}{(N-m)^2}\sum_{k=1}^{N-m}\sum_{i=1}^{N-m}\left[r^2\left(\frac{T}{N}|i-k|\right) + \right. \tag{14}$$

$$\left. + r\left(\frac{T}{N}|i-k+m|\right)r\left(\frac{T}{N}|i-k-m|\right)\right],$$

где T — длительность выборки;

N — количество дискретных равноотстоящих значений.

Используя свойство корреляционных функций

$$R(\tau) = R(-\tau),$$

выражение (14) можно преобразовать

$$\sigma_g^2[r(\tau)] = \frac{1}{N-m}\Bigg\{1 + r^2(\tau) + $$

$$+ 2\sum_{k=1}^{N-m-1}\left(1 - \frac{k}{N-m}\right)[r^2(\tau_0 k) + r(\tau_0 k + \tau_0 m)\, r(\tau_0 k - \tau_0 m)], \qquad (15)$$

где $\tau_0 = \frac{T}{N}$ — период частоты квантования,

$$N \geqslant m + 1.$$

Если в выражении (15) подставить первое слагаемое из (7) и затем в полученном результате отбросить члены порядка δ^2, то с погрешностью порядка δ^4 мы тем самым учтем влияние второго слагаемого. К такому выводу можно прийти, сравнивая выражения (9) и (11) с выражениями (12) и (13).

Вычисление (15) сводится к нахождению сумм вида

$$\sum^n e^{-\lambda k};\quad \sum^n k e^{-\lambda k};\quad \sum^n e^{-\lambda k}\cos\varepsilon k;\quad \sum^n k e^{-\lambda k}\cos\varepsilon k.$$

Вторая сумма представляется суммой n рядов вида $\sum_{k=l}^{n} e^{-\lambda k}$, где $l = 1, 2, 3, \ldots n$;

$$\sum_{k=1}^{n} k e^{-\lambda k} = -\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\left(n e^{-\lambda n} - \frac{1-e^{-\lambda n}}{1-e^{-\lambda}}\right).$$

Остальные суммы можно найти, представляя косинусы по формуле Эйлера. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\sigma_g^2[r(\tau)] \approx \frac{\tau_0}{\Delta}[1 + r^2(\tau)] +$$

$$+ 2e^{-\delta\omega_0\tau_0}\left[\frac{\tau_0}{\Delta}\cdot\frac{1}{1-e^{-\delta\omega_0\tau_0}} - \frac{\tau_0^2}{\Delta^2}\cdot\frac{1-e^{-\delta\omega_0\Delta}}{(1-e^{-\delta\omega_0\tau_0})^2}\right]\cos^2\omega_0'\tau. \qquad (16)$$

Здесь $\Delta = \tau_0(N-m)$, $N \geqslant m+1$, $\tau = \tau_0 m$.

Переход к дискретным значениям приводит к возрастанию статистической погрешности, так как теряется часть информации. Сравнивая выражения (16) и (11), можно судить об оптимальности выбора частоты квантования и мерой этому может служить отношение $\frac{\sigma_g[r(0)]}{\sigma[r(0)]}$

$$\frac{\sigma_g^2[r(0)]}{\sigma^2[r(0)]} \approx \sigma\omega_0\tau_0\frac{1 + \frac{e^{-\delta\omega_0\tau_0}}{1-e^{-\delta\omega_0\tau_0}}\left(1 - \frac{\tau_0}{T}\frac{1-e^{-\delta\omega_0 T}}{1-e^{-\delta\omega_0\tau_0}}\right)}{1 - \frac{1}{\sigma\omega_0 T}(1-e^{-\delta\omega_0 T})}, \qquad (17)$$

где $\delta\omega_0 = 2\pi\Delta f$;

Δf — полоса пропускания на уровне 0,5 по мощности;

τ_0 — период частоты квантования;

T — длительность выборки.

Для значений $\delta\omega_0\tau_0 \sim 10^3$ с погрешностью, не превышающей 10^{-3}, можно получить

$$\frac{\sigma_g\,[r\,(0)]}{\sigma\,[r\,(0)]} \approx \sqrt{\frac{\sigma\omega_0\tau_0}{1-e^{-\delta\omega_0\tau_0}}}. \tag{18}$$

Выражение (18) для значения $\delta\omega_0\tau_0 = 0{,}2$ дает величину 1,05, что означает увеличение статистической погрешности на 5%.

При квантовании непрерывного сигнала возникают шумы квантования, мощность которых подсчитана [3]:

$$\overline{U}^2 = \frac{\varepsilon^2}{12}, \tag{19}$$

где ε — разность напряжений между соседними, равноотстоящими уровнями.

Если исследуемый нами сигнал имеет нормальный закон распределения амплитуд, то верхний уровень можно выбрать равным $3\sqrt{\overline{U_c^2}}$, так как вероятность его превышения уже мала и имеет величину порядка 10^{-3}.

Тогда из соотношения

$$3\sqrt{\overline{U_c^2}} = n\varepsilon \ (n \text{ — количество уровней})$$

находим

$$\frac{\overline{U^2_{\text{шк}}}}{\overline{U^2_{\text{с}}}} = \frac{3}{4n^2}. \tag{20}$$

Задавшись допустимым уровнем шумов квантования, из выражения (20) можно найти количество уровней.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Евграфов. Аналитические функции. Изд-во «Наука», 1968.
2. Н. А. Ливщиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. 1. Изд-во «Советское радио», 1963.
3. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1. Изд-во «Советское радио», 1969.