

К ТЕОРИИ МОДУЛИРОВАННЫХ ФИЛЬТРОВ

П. Ф. Поляков

Модулированными фильтрами называют фильтры, параметры которых подвержены произвольному, но медленному, по сравнению с их невозмущенной частотой, изменению [1]. Изменение параметров в таких фильтрах могут быть периодическими и непериодическими, детерминированными и случайными.

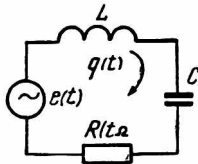


Рис. 1. Колебательный контур с модулированным активным сопротивлением.

Теория линейных модулированных фильтров глубоко разработана А. С. Виницким [1] применительно к следящему приему ЧМ. В настоящей статье мы рассмотрим линейный резонансный контур с модулированным активным сопротивлением и определим его основные свойства, а также проведем анализ воздействия на модулированный контур различных сигналов. Для общности рассмотрения не будем накладывать на законы модуляции активного сопротивления и внешней э. д. с. никаких ограничений, кроме условия их медленности относительно собственной частоты невозмущенного контура.

Дифференциальное уравнение для схемы, представленной на рис. 1, очевидно можно записать в виде

$$L\ddot{q} + R(t_2)\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t), \quad (1)$$

где $t_2 = \Omega t$ — «медленное время»;

Ω — малый параметр, характеризующий медленность модуляции.

Представим закон модуляции сопротивления контура $R(t_2)$ в виде

$$R(t_2) = R_0 + R_m r(t_2) = R_0 [1 + m_r r(t_2)], \quad (2)$$

где R_0 — «несущие» значение сопротивления контура;

$r(t_2)$ — безразмерный закон модуляции сопротивления контура;

R_m — максимальное отклонение $R(t_2)$ от R_0 ;

$m_r = \frac{R_m}{R_0}$ — глубина модуляции сопротивления контура.

Уравнение (1) легко привести к виду

$$\ddot{q} + 2\alpha(t_2)\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} e(t), \quad (3)$$

где $\alpha(t_2) = \frac{R(t_2)}{2L} = \frac{R_0}{2L} + \frac{R_m}{2L} r(t_2) = \alpha_0 + \alpha_m r(t_2)$ — коэффициент, характеризующий затухание; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ — резонансная частота контура.

Свободные колебания в модулированном контуре с потерями. Для определения свободных колебаний заряда в контуре с потерями надо решить однородное уравнение

$$\ddot{q} + 2\alpha(t_2)\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4)$$

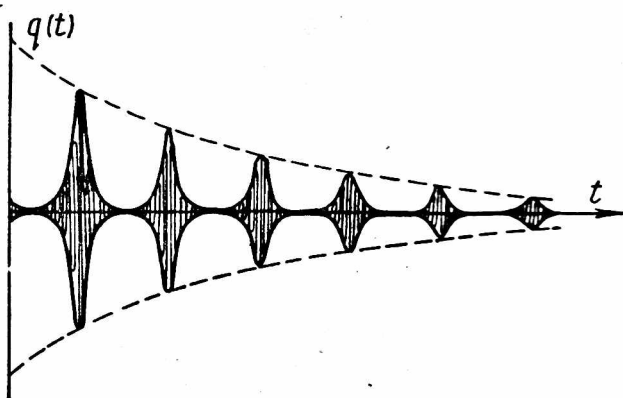


Рис. 2. Оциллограмма свободных колебаний в модулированном контуре.

С помощью известной постановки [2]

$$q(t) = q_0(t) \exp[-\int \alpha(t_2) dt] \quad (5)$$

это уравнение легко решается:

$$q(t) = \exp[-\int \alpha(t_2) dt] (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t), \quad (6)$$

где A, B — произвольные постоянные.

Учитывая, что

$$\int \alpha(t_2) dt = \int [\alpha_0 + \alpha_m r(t_2)] dt = \alpha_0 t + \alpha_m \int r(t_2) dt,$$

перепишем выражение (6) следующим образом:

$$q(t) = (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \exp[-\alpha_0 t] \exp[-\alpha_m \int r(t_2) dt]. \quad (7)$$

Как видно из уравнения (7), свободные колебания в контуре с модулированным сопротивлением представляют собой затухающую синусоиду (косинусоиду) с модулированной амплитудой. Закон модуляции амплитуды заряда в контуре определяется множителем $\exp[-\alpha_m \int r(t_2) dt]$.

На рис. 2 приведена оциллограмма свободных колебаний в контуре, у которого активное сопротивление изменяется по гармоническому закону с частотой Ω , т. е.

$$R(t_2) = R_0 + R_m \cos \Omega t. \quad (2')$$

Выражение для свободных колебаний при этом имеет вид

$$q(t) = (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \exp[-\alpha_0 t] \exp\left[-\frac{\alpha_m}{\Omega} \sin \Omega t\right]. \quad (8)$$

Как видно из выражения (8) и рис. 2, свободные колебания заряда в контуре затухают тем быстрее, чем больше «несущее» значение затухания контура.

Собственные колебания модулированного контура. Для определения формы собственных колебаний заряда необходимо решить однородное уравнение контура (4) в отсутствие потерь ($\alpha_0 = 0$)

$$\ddot{q} + 2\alpha_m r(t_\Omega) \dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (9)$$

Легко убедиться, что решение уравнения (9) имеет вид

$$q_e(t) = (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \exp[-\alpha_m \int r(t_\Omega) dt]. \quad (10)$$

Используя (3) и (10), легко определить резонансную э. д. с. для модулированного контура

$$e_{p. м}(t) = 2L\omega_0 (-A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) \exp[-\alpha_m \int r(t_\Omega) dt]. \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что форма резонансной э. д. с. совпадает с формой собственных колебаний заряда в модулированном контуре.

Импульсная характеристика модулированного контура. Для определения отклика контура на входное воздействие будем пользоваться методом интеграла наложения. Известно [3], что при воздействии на вход четырехполюсника с импульсной характеристикой $g(t, x)$ произвольного сигнала $U(t)$ выходной сигнал можно определить с помощью выражения

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) g(t, x) dx. \quad (12)$$

Для физически осуществимой цепи $q(t, x) = 0$ при $t < x$ выражение (12) запишется в виде

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t U(x) g(t, x) dx. \quad (13)$$

Таким образом, для определения выходного сигнала модулированного контура необходимо знать его импульсную характеристику, которая определяется по заданным параметрам контура, т. е. по его дифференциальному уравнению [3]. В нашем случае поведение контура описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и импульсная характеристика определяется выражением

$$g(t, x) = -\frac{1}{W(x)} [q_1(t) q_2(x) + q_2(t) q_1(x)], \quad (14)$$

где $W(x) = \begin{vmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_1'(x) & q_2'(x) \end{vmatrix}$ — определитель Вронского; $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — решение однородного дифференциального уравнения (4).

В соответствии с выражением (7)

$$g_1(t) = A \exp[-\alpha_0 t] \exp[-\alpha_m \int r(t_\Omega) dt] \cos \omega_0 t; \quad (7')$$

$$g_2(t) = B \exp[-\alpha_0 t] \exp[-\alpha_m \int r(t_\Omega) dt] \sin \omega_0 t. \quad (7'')$$

Подставив (15), (7') и (7'') в (14), после несложных, но громоздких выкладок получим выражение для импульсной характеристики

$$g(t, x) = \frac{q_2(t)}{B\omega_0} \exp[\alpha_0 x + \alpha_m \int r(t_\Omega) dt] \cos \omega_0 x - \frac{q_1(t)}{A\omega_0} \exp[\alpha_0 x + \alpha_m \int r(t_\Omega) dt] \sin \omega_0 x. \quad (16)$$

Для случая гармонического изменения активного сопротивления контура с частотой Ω (2'), импульсная характеристика определится выражением

$$g(t, x) = \frac{q_2(t)}{B\omega_0} \exp\left[\alpha_0 x + \frac{\alpha_m}{\Omega} \sin \Omega x\right] \cos \omega_0 x - \frac{q_1(t)}{A\omega_0} \exp\left[\alpha_0 x + \frac{\alpha_m}{\Omega} \sin \Omega x\right] \sin \omega_0 x. \quad (16')$$

Анализ воздействия сигналов различной формы на контур с модулированным активным сопротивлением по гармоническому закону. 1. Рассмотрим воздействие на контур с импульсной характеристикой (16') колебания, определяемого следующим выражением:

$$U(t) = c \exp \left[-\frac{\alpha_m}{\Omega} \sin(\Omega t - \varphi) \right] \cos \omega_0 t, \quad (17)$$

где c — постоянный коэффициент;
 φ — произвольный фазовый угол.

Подставив (17) и (16) в (13), получим

$$\begin{aligned} q_{\text{вых}}(t) = & \frac{cq_2(t)}{2B\omega_0 L} \int_{-\infty}^t \exp[\alpha_0 x] \exp \left[\eta \cos \left(\Omega x - \frac{\varphi}{2} \right) \right] dx + \\ & + \frac{cq_2(t)}{2B\omega_0 L} \int_{-\infty}^t \exp[\alpha_0 x] \exp \left[\eta \cos \left(\Omega x - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \cos 2\omega_0 x dx - \\ & - \frac{cq_1(t)}{2A\omega_0 L} \int_{-\infty}^t \exp[\alpha_0 x] \exp \left[\eta \cos \left(\Omega x - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \sin 2\omega_0 x dx, \quad (18) \end{aligned}$$

где $\eta = 2 \frac{\alpha_m}{\Omega} \sin \frac{\varphi}{2}$.

Для вычисления интегралов в правой части выражения (18) воспользуемся разложением в ряд Фурье функции

$$\exp \left[\eta \cos \left(\Omega x - \frac{\varphi}{2} \right) \right] = I_0(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta) \cos n \left(\Omega x - \frac{\varphi}{2} \right), \quad (19)$$

где $I_n(\eta)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка. С помощью разложения (19) входящие в выражение (18) интегралы приводятся к сумме простых интегралов, которые легко вычисляются. Окончательно выражение для вынужденных колебаний заряда в контуре с модулированным активным сопротивлением может быть приведено к виду:

$$\begin{aligned} q_{\text{вых}}(t) = & \frac{c}{2\omega_0 L} \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \left\{ \frac{I_0(\eta)}{\alpha_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta) \times \right. \\ & \times \frac{\cos \left[n \left(\Omega t - \frac{\varphi}{2} \right) - \psi_n \right]}{\sqrt{\alpha_0^2 + (n\Omega)^2}} + I_0(\eta) \frac{\cos(2\omega_0 t - \psi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + (2\omega_0)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta) \times \\ & \times \left(\frac{\cos \left[(2\omega_0 - n\Omega) t + \frac{n\varphi}{2} - \psi'_n \right]}{\sqrt{\alpha_0^2 + (2\omega_0 - n\Omega)^2}} + \frac{\cos \left[(2\omega_0 + n\Omega) t - \frac{n\varphi}{2} - \psi''_n \right]}{\sqrt{\alpha_0^2 + (2\omega_0 + n\Omega)^2}} \right) \left. \right\} \times \\ & \times \sin \Omega_0 t - \frac{c}{2\omega_0 L} \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \left\{ I_0(\eta) \frac{\sin(2\omega_0 t - \psi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + (2\omega_0)^2}} + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta) \left(\frac{\sin \left[(2\omega_0 - n\Omega) t + \frac{n\varphi}{2} - \psi'_n \right]}{\sqrt{\alpha_0^2 + (2\omega_0 - n\Omega)^2}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sin \left[(2\omega_0 + n\Omega) t - \frac{n\varphi}{2} - \psi''_n \right]}{\sqrt{\alpha_0^2 + (2\omega_0 + n\Omega)^2}} \right) \right\} \cos \omega_0 t, \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$\psi_n = \arctg \frac{n\Omega}{\alpha_0}; \quad \psi'_n = \arctg \frac{2\omega_0 - n\Omega}{\alpha_0}; \quad \psi''_n = \arctg \frac{2\omega_0 + n\Omega}{\alpha_0}.$$

Обычно для модулированных контуров выполняется неравенство $\omega_0 \gg \alpha_0$. С большой степенью точности можно записать следующее выражение:

$$q_{\text{вых}}(t) = \frac{c}{2\omega_0 L} \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \left\{ \frac{I_0(\eta)}{\alpha_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta) \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos \left[n \left(\Omega t - \frac{\varphi}{2} \right) - \psi_n \right]}{\sqrt{\alpha_0^2 + (n\Omega)^2}} \right\} \sin \omega_0 t. \quad (20')$$

Напряжение на контуре при этом имеет вид

$$U_{\text{вых}}(t) = cQ_0 \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \left\{ I_0(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta) \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos \left[n \left(\Omega t - \frac{\varphi}{2} \right) - \psi_n \right]}{\sqrt{\alpha_0^2 + (n\Omega)^2}} \right\} \cos \omega_0 t, \quad (21)$$

где $\frac{1}{\omega_0 c R_0} = Q_0$ — «несущее» значение добротности контура.

Представляет интерес анализ выражения (21). Полагая в нем $\varphi = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2 \dots$), получим выражение для отклика модулированного контура на э. д. с. резонансной формы

$$U_{\text{вых}}(t) = cQ_0 \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \cos \omega_0 t \quad (22)$$

так как выражение в фигурных скобках при $\varphi = 2k\pi$ равно единице в силу того, что значения модифицированной функции Бесселя первого рода всех порядков, кроме нулевого, равны нулю [4], а значение модифицированной функции Бесселя нулевого порядка — единице.

Как видно из выражений (11) и (22), при воздействии на модулированный контур резонансной э. д. с. форма ее не изменяется. Можно показать, что обычное гармоническое колебание является сложным для модулированного контура. Такой контур, настроенный на частоту ω_0 , дает сложный резонансный отклик вида (22) для бесчисленного множества подаваемых на его вход синусоид, частоты которых отличаются от ω_0 на величину, кратную частоте Ω . Этим объясняется и явление кратного резонанса [5] при периодическом изменении как сопротивления, так и любого другого параметра контура.

При произвольном значении фазового угла $\varphi \neq 2k\pi$ отклик контура определяется выражением (21). Как видно из него, амплитуда отклика остро зависит от параметра η (при $\eta \geq 4$). Эту зависимость можно использовать при проектировании систем с фазовым разделением.

В заключение рассмотрим воздействие обычного АМ-сигнала на модулированный контур. АМ — сигнал запишем в виде

$$U(t) = U_{\text{мо}} [1 + m \sin \Omega_c t] \cos \omega_0 t. \quad (23)$$

Подставив (16') и (23) в (13) и произведя необходимые преобразо-

вания, получим выражение для отклика контура на АМ-сигнал в виде

$$q_{\text{вых}}(t) = \frac{U_{m0}}{2B\omega_0 L} q_2(t) \int_{-\infty}^t [1 + m \sin \Omega_c x] \exp \left[a_0 x + \frac{a_m}{\Omega} \sin \Omega x \right] dx. \quad (24)$$

Используя разложение

$$\exp \left[\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] = I_0 \left(\frac{\eta}{2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n} \left(\frac{\eta}{2} \right) \cos 2n \Omega t - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \sin (2n-1) \Omega t$$

и вычисляя интегралы, выражение (24) легко привести к виду

$$q_{\text{вых}}(t) = \frac{a_0 U_{m0}}{\omega_0 R_0} \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \left\{ \frac{I_0 \left(\frac{\eta}{2} \right)}{a_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right. \\ \times I_{2n} \left(\frac{\eta}{2} \right) \frac{\cos (2n \Omega t - \psi_{2n})}{\sqrt{a_0^2 + (2n \Omega)^2}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \times \\ \times \frac{\sin [(2n-1) \Omega t - \psi_{2n-1}]}{\sqrt{a_0^2 + (2n-1)^2 \Omega^2}} + m \left[I_0 \left(\frac{\eta}{2} \right) \frac{\sin (\Omega_c t - \psi_c)}{\sqrt{a_0^2 + \Omega_c^2}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n} \left(\frac{\eta}{2} \right) \frac{\sin [(2n \Omega + \Omega_c) t - \psi_{2n \Omega + \Omega_c}]}{\sqrt{a_0^2 + (2n \Omega + \Omega_c)^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right. \\ \times I_{2n} \left(\frac{\eta}{2} \right) \frac{\sin [(2n \Omega - \Omega_c) t - \psi_{2n \Omega - \Omega_c}]}{\sqrt{a_0^2 + (2n \Omega - \Omega_c)^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \\ \times I_{2n-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{\cos [(2n-1) \Omega t - \Omega_c t - \psi_{(2n-1) \Omega - \Omega_c}]}{\sqrt{a_0^2 + [(2n-1) \Omega - \Omega_c]^2}} - \right. \\ \left. \left. - \frac{\cos [(2n-1) \Omega t + \Omega_c t - \psi_{(2n-1) \Omega + \Omega_c}]}{\sqrt{a_0^2 + [(2n-1) \Omega + \Omega_c]^2}} \right) \right\} \sin \omega_0 t. \quad (25)$$

где

$$\psi_{2n} = \arctg \frac{2n \Omega}{a_0}; \quad \psi_c = \arctg \frac{\Omega_c}{a_0}; \quad \psi_{2n \Omega \pm \Omega_c} = \arctg \frac{2n \Omega \pm \Omega_c}{a_0}.$$

Выражение (25) громоздко и неудобно для анализа. Рассмотрим два частных случая.

1. Частота модуляции сопротивления контура $\Omega \gg \Omega_c$, $\Omega \gg a_0$, тогда

$$q_{\text{вых}}(t) \cong \frac{I_0 \left(\frac{\eta}{2} \right)}{\omega_0 R_0} U_{m0} \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{a_0} \right)^2}} \sin (\Omega_c t - \psi_c) \right] \sin \omega_0 t$$

или напряжение на контуре

$$U_{\text{вых}}(t) = Q_0 I_0 \left(\frac{\eta}{2} \right) U_{m0} \exp \left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{a_0} \right)^2}} \sin (\Omega_c t - \psi_c) \right] \cos \omega_0 t. \quad (26)$$

Используя разложение в ряд Фурье функции

$$\exp\left[-\frac{\eta}{2} \sin \Omega t\right] = I_0\left(\frac{\eta}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n}\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos 2n\Omega t + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n-1} \sin (2n-1)\Omega t$$

и выделяя напряжение с частотой ω_0 , получим окончательное выражение для отклика модулированного контура на АМ-сигнал в следующем виде:

$$U_{\text{вых}}(t) \approx Q_0 I_0^2\left(\frac{\eta}{2}\right) U_{\text{по}} \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{\alpha_0}\right)^2}} \sin(\Omega_c t - \psi_c) \right] \cos \omega_0 t. \quad (26')$$

Из выражения (26) видно, что при прохождении АМ-сигнала через модулированный контур амплитуда его увеличивается в $I_0^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ раз по сравнению с амплитудой этого сигнала на выходе немодулированного контура, т. е. АМ-сигнал получает усиление, равное

$$K = Q_0 I_0^2\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

где K — коэффициент усиления.

Этот результат совпадает с ранее полученным в работе [6].

2. Частота модуляции сопротивления контура $\Omega \ll \Omega_c$, $\Omega \ll \alpha_0$.

Тогда из (25) получим

$$U_{\text{вых}}(t) \approx Q_0 U_{\text{по}} \left[1 + \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{\alpha_0}\right)^2}} \sin(\Omega_c t - \psi_c) \right] \cos \omega_0 t. \quad (27)$$

Выражение (27) совпадает с хорошо известным откликом гармонического контура на АМ-сигнал вида (23) [3]. Таким образом, можно сделать вывод, что контур с модулированным активным сопротивлением по гармоническому закону с частотой Ω , малой по сравнению с частотой модуляции АМ-сигнала, ведет себя по отношению к нему как обычный гармонический контур.

Аналогично можно рассмотреть воздействие на модулированный контур сигналов с другими видами модуляции.

Изложенный выше метод определения отклика модулированного контура на произвольного вида сигнал может быть полезен при анализе работы схем сверхрегеративных усилителей в линейном режиме, а также при проектировании систем с разделением сигналов по фазе огибающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Виницкий. Модулированные фильтры и следящий прием ЧМ. Изд-во «Советское радио», 1969.
2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II. Физматгиз, 1957.
3. И. С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы, ч. I. Изд-во «Советское радио», 1967.
4. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Изд-во «Наука», 1968.
5. Г. С. Горелик, Г. М. Гинц. Исследование супергетеродинного приемника метровых волн. «Техника радио и слабого тока», 1932, № 12.
6. М. К. Белкин. Сверхрегеративный радиоприем. Изд-во «Техника», 1968.