О ПОГРЕШНОСТЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА

В. А. Письменецкий

При исследовании свойств систем формирования спектральной плотности в истинном масштабе времени на рециркуляторах наиболее удобным для анализа является представление входных сигналов с помощью ряда Котельникова [1, 2]. Как в методе сжатия в силу конечности емкости элемента памяти, так и в методе накопления [2] из-за ограничения числа циркуляций входные сигналы описываются финитными функциями. Ряд Котельникова в этом случае является «усеченным», и при восстановлении сигналов по дискретным отчетам возникает погрешность. На это обстоятельство в свое время обращалось внимание [3], однако полученные результаты позволяют оценить лишь общую или максимальную в пределах реализации погрешность восстановления. Естественно, что при рассмотрении процесса ведения спектрального анализа сигналов, представляемых конечным числом отсчетов, такие оценки погрешности неприемлемы, так как необходимо знать распределение погрешностей в пределах полосы анализируемых частот Φ_0.

Реально форма выборок может быть различной. Так, при сжатии — это δ-функции, выборки конечной длительности и выборки с постоянной амплитудой. При накоплении — выборки с постоянной амплитудой и длительностью, равной интервалу между отсчетами [2].

Рассмотрим погрешность в спектре сигнала при всех указанных видах выборок.

После дискретизации с помощью δ-функций [4] спектр сигнала

$$S_1(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - l\frac{2\pi}{T}\right), \tag{1}$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность исходного сигнала;
T — интервал между отсчетами.

Из равенства (1) видно, что погрешность в спектре обусловлена суммой

$$S_п(\omega) = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} S\left(\omega - l\frac{2\pi}{T}\right).$$

Поскольку для реальных сигналов $S(\omega)$ практически обращается в нуль на интервале $\omega_0 - 2\omega_0$ (ω_0 — максимальная частота спектра сигнала), можно ограничиться одним слагаемым при $l = 1$. Тогда с учетом $T = \frac{1}{m\Phi_0}$ при $m \geqslant 2$

$$S_п(\omega) = S(\omega - m\omega_0).$$

Общее выражение для спектральной плотности после дискретизации примет вид

$$S_1(\omega) = S(\omega) + S(\omega - m\omega_0). \tag{2}$$

В общем случае слагаемые равенства (2) являются комплексными величинами. Можно показать, что максимальная относительная погрешность в спектре $\Delta(\omega)$ с учетом аргументов $S(\omega)$ и $S(\omega - m\omega_0)$ определится с помощью выражения

$$\Delta(\omega) = \frac{S(\omega - m\omega_0)}{S(\omega)}. \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что с увеличением m относительная погрешность в пределах полосы анализируемых частот Φ_0 будет уменьшаться.

На рис. 1 показана зависимость относительной погрешности $\Delta(\omega)$ на частоте ω_0 для сигнала типа функции Хэминга (сплошная линия). Пунктиром показано аналогичное распределение для сигнала вида $\cos^3 x$. Ширина спектра в обоих случаях определялась на уровне 1% максимального значения $S(\omega)$. Соответствующее число отсчетов при этом

$$N = 2m + 1 \text{ для функции Хэминга;} \quad (4)$$

$$N = 3m + 1 \text{ для функции } \cos^3 x. \quad (5)$$

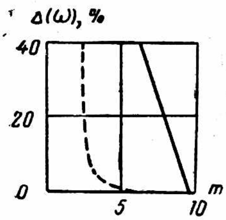

Рис. 1. Зависимость относительной погрешности $\Delta(\omega)$ от m на частоте ω_0.

Из графиков, рисунков и соотношений (4) и (5) видно, что для достаточно точного воспроизведения спектральной плотности сигналов после дискретизации можно ограничиться 10—15 отсчетами.

Погрешность в спектре может быть уменьшена, если весовая функция ряда Котельникова будет иметь большую скорость убывания амплитуд лепестков.

В качестве примера рассмотрим фильтр с откликом вида $(\operatorname{sinc} x)^2$, частотная характеристика которого описывается уравнением

$$k(\omega) = 1 - \frac{\omega}{2\omega_0}.$$

При введении такого фильтра соотношение для относительной погрешности $\Delta(\omega)$ примет вид

$$\Delta(\omega) = \frac{S(\omega - m\omega_0)}{S(\omega)}\left(1 - \frac{\omega}{2\omega_0}\right) - \frac{\omega}{2\omega_0}. \quad (6)$$

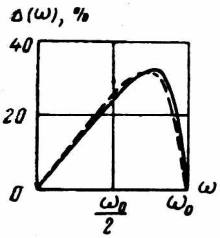

Рис. 2. Распределение относительной погрешности $\Delta(\omega)$ в спектре сигнала при $m = 2$.

С помощью (6) вычислено распределение относительной погрешности $\Delta(\omega)$ в спектре для сигналов вида функции Хэминга и $\cos^3 x$ при $m = 2$.

Результаты вычислений показаны на рис. 2. Сплошной линией обозначена кривая, соответствующая функции Хэминга, пунктиром $\cos^3 x$. Из графиков видно, что кривая погрешности имеет восходящий участок обусловленный линейно спадающей частотной характеристикой фильтра, и падающий участок, характеризующий подавление погрешности, обусловленной слагаемым $S(\omega - m\omega_0)$. Сравнительно высокая скорость спадания спектра сигнала по отношению к скорости убывания частотной характеристики фильтра приводит к перекомпенсации погрешности на участке, где $S(\omega - m\omega_0)$ пренебрежимо мало. Поэтому такой фильтр, по-видимому, даст лучшие результаты при скорости спадания спектра сигнала, меньшей $\frac{1}{\omega^2}$.

В общем случае соотношение для $\Delta(\omega)$ при произвольном фильтре после дискретизации можно записать в виде

$$\Delta(\omega) = \frac{[S(\omega) + S(\omega - m\omega_0)]\,k(\omega) - S(\omega)}{S(\omega)}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что существует некоторый оптимальный фильтр, минимизирующий искажения после дискретизации. Его частотная характеристика

$$k(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + S(\omega - m\omega_0)}. \quad (8)$$

При дискретизации с помощью выборок конечной длительности погрешность $\Delta(\omega)$ будет иметь вид

$$\Delta(\omega) = H(Q)\frac{S(\omega - m\omega_0)}{S(\omega)}; \quad \left(H(Q) = \frac{Q}{\pi}\sin\frac{\pi}{Q}\right), \tag{9}$$

где Q — скважность выборок.

Вычисления показывают, что влияние множителя $H(Q)$ начинает проявляться лишь при $Q \leqslant 20$ (при $Q = 20$; $H(Q) = 0{,}984$).

Поскольку при сжатии $Q = 2 - 5$ и коэффициентах сжатия $N \geqslant 10$, для расчета погрешностей в спектре можно пользоваться выражениями при дискретизации δ — функциями.

Уравнение оптимального фильтра для случая выборок конечной длительности

$$k(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + H(Q)\,S(\omega - m\omega_0)}. \tag{10}$$

При дискретизации выборками постоянной амплитуды уравнение относительной погрешности имеет вид

$$\Delta(\omega) = L(\omega)\frac{S(\omega - m\omega_0)}{S(\omega)} + L(\omega) - 1. \tag{11}$$

$$L(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega}\cdot \frac{Qm}{\pi}\sin\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{\pi}{Qm}.$$

Случай при $Q = 2$ характеризует искажения в спектре сжатого сигнала, а при $Q = 1$ соответствует искажениям и выборкам, длительность которых равна интервалу между отсчетами.

Как видно из (11), дополнительные искажения в этом случае будут вызваны множителем $L(\omega)$. Однако последний изменяется в полосе частот $(0 \div \omega_0)$ весьма медленно и при $Q = 2$ спадает всего на 10% ($\omega = \omega_0$).

Уравнение относительного фильтра при выборках с постоянной амплитудой

$$k(\omega) = \frac{S(\omega)}{L(\omega)\,[S(\omega) + S(\omega - m\omega_0)]}. \tag{12}$$

Из всего сказанного выше можно сделать следующие выводы.

1. Для полной компенсации погрешностей, возникающих при дискретизации финитных сигналов, необходимо синтезировать фильтр, частотная характеристика которого должна быть согласована с законом распределения спектральной плотности исходного сигнала.

2. Замена полосового сигнала ступенчатой функцией, вписанной в его огибающую, при длине ступени в соответствии с теоремой Котельникова является правомерной и не вносит погрешности, большей чем при дискретизации δ-функциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Соловьев, С. С. Свириденко. Новые методы спектрального анализа. «Зарубежная радиоэлектроника», 1961, № 8.

2. В. А. Письменецкий, В. А. Хорунжий. Измерение комплексного спектра узкополосных сигналов в реальном времени. «Радиотехника и электроника», вып. 11., 1969.

3. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. Физматгиз, 1962.

4. Н. К. Игнатьев. Автореф. докторск. дисс., 1965.