СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ. II ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА

В. А. Омельченко

В данной статье рассматривается дисперсионный метод спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени, определяемый способом выполнения преобразования Фурье, характерным для класса $L_{1,2}$ абсолютно интегрируемых функций с конечной энергией.

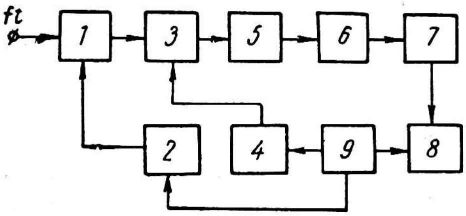
1. Классы сигналов, анализируемых дисперсионным анализатором спектра

При спектральном анализе сигналов дисперсионным анализатором спектр может быть получен в интегральной форме [1] (см. рис.).

В этом случае входной сигнал $f(t)$ предварительно преобразуется в сигнал

$$x(t)=\begin{cases} f(t)\exp\left[2\pi j\left(f_0 t+\frac{t^2}{2\beta}+\psi_0\right)\right]; & |t|\leqslant\frac{T}{2}, \\ 0, & |t|>\frac{T}{2} \end{cases} \tag{1}$$

$f(t)$



Функциональная схема дисперсионного анализатора спектра:

($f(t)$ — входной сигнал): *1* — устройство весовой обработки сигнала; *2* — генератор весовых функций; *3* — смеситель; *4* — генератор линейно изменяющейся частоты; *5* — фильтр; *6* — устройство с дисперсией; *7* — детектор; *8* — индикатор; *9* — синхронизатор.

и затем поступает на вход устройства с дисперсией, временная характеристика которого с достаточной степенью точности описывается выражением

$$g(t)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\beta}}\exp\left\{\left[2\pi j-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta}+f_0(t-\tau_0)+\varphi_0\right]\right\}; & |t-\tau_0|\leqslant\frac{\Delta\tau}{2}; \\ 0, & |t-\tau_0|>\frac{\Delta\tau}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\beta=\frac{\Delta\tau}{\Delta f}$;

$\Delta\tau$ — рабочий диапазон задержек устройства с дисперсией;

Δf — ширина его частотной характеристики, имеющей центральную частоту f_0;

τ_0 — задержка на частоте f_0;

φ_0, ψ_0 — постоянные фазы.

В результате на выходе устройства с дисперсией формируется отклик

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

представляемый также в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,G(j\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega, \tag{3a}$$

где

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau;$$

$$G(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau.$$

Используя выражения (1)—(3а), уточним классы сигналов, для спектрального анализа которых может быть применен дисперсионный анализатор.

Известно [2], что равенство (3а) справедливо, если $g(t)$ и $x(t)$ являются абсолютно интегрируемыми функциями, т. е. выполняются условия

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty; \\ &\text{б)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty. \end{aligned} \tag{4}$$

В соответствии с

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt = \int_{-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\frac{\Delta\tau}{2}} \left| \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left\{2\pi j \left[-f_0(t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0\right]\right\}\right| dt < \infty \tag{4а'}$$

и с учетом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| f(t) \exp\left[2\pi j \left(f_0 t + \frac{t^2}{2\beta} + \psi_0\right)\right]\right| dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|\, dt \tag{4б'}$$

условие (4) эквивалентно условию абсолютной интегрируемости входного сигнала при $|t| \leqslant \frac{T}{2}$.

Так как из

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|\, dt < \infty$$

следует

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt < \infty,$$

окончательно получаем, что сигнал $f(t)$ при $|t| \leqslant \frac{T}{2}$ должен быть из класса $L_{1,2}\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

Таким образом, дисперсионный анализатор спектра можно использовать для спектрального анализа произвольных сигналов, которые при $|t| \leqslant \frac{T}{2}$ принадлежат классу $L_{1,2}\left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$. В частности, это могут быть сигналы

$$f(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i \exp(2\pi j f_i t) \tag{5}$$

с дискретным спектром.

На выходе анализатора формируется спектр в интегральной форме, характерной для класса $L_{1,2}$.

2. Основные соотношения

Отклик (3) на выходе устройства с дисперсией можно представить в развернутом виде [1]:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left\{2\pi j \left[f_0(t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0\right]\right\} \times$$

$$\times \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left[-2\pi j \left(-\frac{t-\tau_0}{\beta} x\right)\right] dx. \tag{3а}$$

Определяя входящее в это выражение время T взаимодействия сигнала с анализатором из условия, что все спектральные составляющие сигнала одновременно взаимодействуют с устройством с дисперсией, приводим (3а) к виду

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\exp\left\{2\pi j\left[f_0(t-\tau_0)-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta}+\varphi_0\right]\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{-\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}}^{\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}} f(x)\exp\left[-2\pi j\left(-\frac{t-\tau_0}{\beta}\right)x\right]dx. \tag{6}$$

Здесь

$$T=\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\Delta\tau; \tag{7}$$

F — ширина участка спектра, одновременно взаимодействующего с устройством с дисперсией, причем величина F выбирается из условия

$$F\leqslant\frac{\Delta f}{2}. \tag{8}$$

В этом выражении сомножитель

$$\exp\left\{2\pi j\left[f_0(t-\tau_0)-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta}+\varphi_0\right]\right\}$$

представляет собой быстро изменяющуюся функцию времени, а сомножитель

$$\int\limits_{-\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}}^{\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}} f(x)\exp\left[-2\pi j\left(-\frac{t-\tau_0}{\beta}\right)x\right]dx$$

— медленно изменяющуюся функцию времени. Последний является мгновенным спектром сигнала $f(t)$.

В частном случае спектрального анализа сигналов с дискретным спектром возникают некоторые особенности.

Рассмотрим этот случай.

Допустим, что сигнал (5) умножается на весовую функцию

$$\varphi(t)=\begin{cases}\neq 0, & |t|\leqslant\frac{T}{2}\\ 0, & |t|>\frac{T}{2},\end{cases}$$

а затем линейно модулируется по частоте и подается на устройство с дисперсией. В результате формируется отклик

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\exp\left\{2\pi j\left[f_0(t-\tau_0)-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta}+\varphi_0\right]\right\}\times \tag{9}$$
$$\times\left\{\sum_{i=1}^{M}A_i\int\limits_{-\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}}^{\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}}\varphi(x)\exp\left[2\pi j\left(\frac{\tau_0-t}{\beta}-f_i\right)x\right]dx.\right\}.$$

Он представляет собой сумму радиоимпульсов

$$y_i(t)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\exp\left\{2\pi j\left[f_0(t-\tau_0)-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta}+\varphi_0\right]\right\}\times$$
$$\times A_i\int\limits_{-\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}}^{\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}}\varphi(x)\exp\left[2\pi j\left(\frac{\tau_0-t}{\beta}-f_i\right)x\right]dx,$$

огибающие которых совпадают со спектром весовой функции. Максимальные значения радиоимпульсов пропорциональны амплитудам составляющих сигнала (5), а временные положения максимумов соответствует их частотам.

Следовательно, огибающая отклика (9) является мгновенным спектром взвешенного сигнала. Поэтому выбором вида весовой функции можно корректировать форму отклика.

Выражения (6) и (9) определяют возможность спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени. При этом можно получить как амплитудный, так и фазовый мгновенный спектр.

Учитывая, что мгновенный спектр

$$S_T(jt) = \int\limits_{-\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}}^{\left(1-\frac{F}{\Delta f}\right)\frac{\Delta\tau}{2}} f(x)\exp\left[-2\pi j\left(-\frac{t-\tau_0}{\beta}\right)x\right]dx$$

может быть представлен в виде

$$S_T(jt) = S_T(t)\exp[j\varphi_T(t)],$$

т. е. отклик (6) приведен к виду

$$y(t) = \frac{S_T(t)}{\sqrt{\beta}}\exp\left\{2\pi j\left[f_0(t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_T(t) + \varphi_0\right]\right\}, \qquad (6а)$$

видим, что искомый амплитудный $S_T(t)$ и фазовый $\varphi_T(t)$ спектры можно получить при амплитудном и фазовом детектировании отклика.

3. Основные параметры анализатора спектра

Дисперсионный метод спектрального анализа реализуется анализатором, функциональная схема которого приведена на рисунке.

Анализатор работает следующим образом.

Входной сигнал поступает на устройство весовой обработки, где он перемножается с весовой функцией, и далее подается на смеситель. Одновременно сюда поступает сигнал от генератора линейно изменяющейся частоты. Полученный на выходе смесителя сигнал проходит через полосовый фильтр, выделяющий область частот $|f_0 - f| \leqslant \frac{\Delta f}{4}$, и попадает на вход устройства с дисперсией. В результате преобразования последним через время T на выходе оказывается сформирован отклик, содержащий искомую информацию о спектре.

Полоса обзора

Отклик формируется в полосе обзора Φ_0, которую можно определить из условия $\Phi_0 = F$. Тогда в соответствии с (8) получим выражение

$$\Phi_0 = \lambda\Delta f \qquad (10)$$

где

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2}.$$

Величина Φ_0 совпадает с шириной участка спектра сигнала, одновременно взаимодействующего с устройством с дисперсией.

Время однократного анализа спектра

Время формирования спектра в полосе Φ_0 определяется выражением (7) и с учетом (10) может быть представлено в виде

$$T_0 = (1-\lambda)\,\Delta\tau. \qquad (11)$$

Если применяется периодический процесс анализа с периодом $T_n = T_0$, время T_0 является временем однократного анализа спектра. В этом режиме на выходе устройства с дисперсией формируются спектры примыкающих отрезков сигнала.

Разрешающая способность анализатора спектра

При анализе сигналов с дискретным спектром принято вводить разрешающую способность R анализатора по частоте.

Найдем R с учетом динамического диапазона уровней сигнала.

Пусть на входе анализатора действует сигнал

$$f(t) = A_1 \exp(2\pi j f_1 t) + A_2 \exp(2\pi j f_2 t),$$

где $\frac{A_1}{A_2} = D > 1$ — динамический диапазон уровней.

Тогда отклик на выходе устройства с дисперсией имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left\{2\pi j \left[f_0 (t - \tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_\theta + \varphi_0\right]\right\} \times$$

$$\times \left\{A_1 \int\limits_{-(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}} \varphi(x) \exp\left[-2\pi j \left(\frac{\tau_0 - t}{\beta} - f_1\right) x\right] dx + \right.$$

$$\left. + A_2 \int\limits_{-(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}} \varphi(x) \exp\left[-2\pi j \left(\frac{\tau_0 - t}{\beta} - f_2\right) x\right] dx\right\}$$

и в случае прямоугольной весовой функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant (1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2} \\ 0, & |t| > (1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2} \end{cases}$$

представляет собой сумму радиоимпульсов

$$y_1(t) = \frac{A_1 \Delta\tau (1-\lambda)}{\sqrt{\beta}} \exp\left\{2\pi j \left[f_0 (t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0\right]\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin\left[\pi\Delta\tau (1-\lambda)\left(f_1 + \frac{t-\tau_0}{\beta}\right)\right]}{\pi\Delta\tau (1-\lambda)\left(f_1 + \frac{t-\tau_0}{\beta}\right)} \qquad (12а)$$

и

$$y_2(t) = \frac{A_2 \Delta\tau (1-\lambda)}{\sqrt{\beta}} \exp\left\{2\pi j \left[f_0 (t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0\right]\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin\left[\pi\Delta\tau (1-\lambda)\left(f_2 + \frac{t-\tau_0}{\beta}\right)\right]}{\pi\Delta\tau (1-\lambda)\left(f_2 + \frac{t-\tau_0}{\beta}\right)} \qquad (12б)$$

с огибающими типа $\frac{\sin x}{x}$.

Определим разрешающую способность из условия превышения в p раз амплитуды малого радиоимпульса (12б) амплитуды бокового лепестка большого радиоимпульса (12а) при $t = t_2 = \tau_0 + \beta f_2$.

Выполняя аналогично работе [3] соответствующие вычисления, получим выражение

$$R=\frac{p}{\pi}D\frac{1}{\Delta\tau(1-\lambda)},\quad D\gg 1. \tag{13}$$

Легко показать, что при $D=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$ справедлива формула

$$R=\frac{2}{\Delta\tau}=\frac{2}{\lambda}\frac{\Phi_0}{K}, \tag{13a}$$

где $K=\Delta\tau\Delta f$ — коэффициент качества устройства с дисперсией.

Из выражения (13) следует, что при весовой обработке сигнала прямоугольной весовой функцией разрешающая способность анализатора сильно зависит от динамического диапазона. Это объясняется большим уровнем и малой скоростью убывания боковых лепестков отклика с огибающей вида $\frac{\sin x}{x}$.

Корректируя форму отклика путем весовой обработки соответствующими весовыми функциями, можно при $D\gg 1$ значительно уменьшить влияние D на R.

При выборе типа весовой функции следует иметь в виду, что разрешающая способность анализатора при малых D определяется шириной основного лепестка спектра весовой функции или уровнем его первых боковых лепестков, а при больших D — уровнем удаленных лепестков, т. е. практически скоростью убывания боковых лепестков спектра. Поэтому при $1<D<100$ удобной является весовая функция Хэминга

$$\varphi(t)=\begin{cases}0{,}64+0{,}36\cos\dfrac{2\pi t}{\Delta\tau(1-\lambda)}; \\ \qquad\qquad |t|\leqslant\dfrac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda); \\ 0, \qquad\quad |t|>\dfrac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda),\end{cases}$$

которая имеет достаточно узкий основной лепесток спектра и малый уровень первых боковых лепестков (максимальный уровень составляет 42 *дб* [4]). При больших D рационально применять функцию Гаусса или функции косинус в степени n

$$\varphi(t)=\begin{cases}\cos^n\dfrac{\pi t}{\Delta\tau(1-\lambda)}, & |t|\leqslant\dfrac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda); \\ 0, & |t|>\dfrac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda);\end{cases}$$

спектр которых убывает [5] как $\frac{1}{f^{n+1}}$. В частности, при весовой обработке функцией косинус — квадрат

$$\varphi(t)=\begin{cases}\cos^2\dfrac{\pi t}{\Delta\tau(1-\lambda)}, & |t|\leqslant\dfrac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda); \\ 0, & |t|>\dfrac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda),\end{cases}$$

соответствующей $n=2$, для разрешающей способности справедлива зависимость

$$R=\sqrt[3]{\frac{p}{\pi}D}\,\frac{1}{\Delta\tau(1-\lambda)},\quad D\gg 1, \tag{14}$$

откуда видно, что R значительно улучшается по сравнению с (13).

В общем случае при весовой обработке сигнала некоторой функцией $\varphi(t)$ разрешающая способность определяется выражением

$$R = f(D, \varphi, p)\frac{1}{\Delta\tau(1-\lambda)}, \quad (D \gg 1), \tag{15}$$

где $f(D, \varphi, p)$ — функция, зависящая от $\varphi(t)$, динамического диапазона и критерия различимости p. При этом для $D \gg 1$ может быть достигнуто соотношение $f(D, \varphi, p) \ll \frac{p}{\pi} D$.

Эквивалентная скорость анализа

Представим взаимосвязь основных параметров анализатора через скорость анализа

$$\gamma = \frac{\Phi_0}{T_0}. \tag{16}$$

В общем случае весовой обработки сигнала произвольной весовой функцией при $D \gg 1$ выражение (16) можно привести к виду

$$\gamma = \frac{\lambda(1-\lambda)K}{f^2(D, \varphi, p)} R^2. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что при $D = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ в случае весовой обработки прямоугольной весовой функцией скорость анализа определяется в соответствии с

$$\gamma = \frac{K}{4} R^2. \tag{17a}$$

Отсюда видно, что взаимосвязь основных параметров анализатора существенно зависит от коэффициента качества устройства с дисперсией.

Описанный дисперсионный метод спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени определяется способом выполнения преобразования Фурье в классе $L_{1,2}$ абсолютно интегрируемых функций с конечной энергией. Метод спектрального анализа, основанный на способе выполнения преобразования Фурье в третьем из основных исследуемых классов, в классе D_1 абсолютно интегрируемых функций с конечной протяженностью во времени, будет рассмотрен в следующей, III части работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Лободинский, Е. И. Оноприенко. Об анализе спектра устройством с дисперсией. «Радиотехника», 1966, № 10.
2. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике теории связи в оптике. Физматгиз, 1962.
3. В. А. Омельченко. О влиянии динамического диапазона на разрешающую способность спектроанализатора. Сб. «Радиотехника», вып. 8. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
4. Тимс. Коррекция боковых лепестков в канале дальности радиолокационной станции со сжатием импульсов. «Зарубежная радиоэлектроника», 1963, № 5.
5. М. С. Гуревич. Спектры радиосигналов. Связьиздат, 1963.