

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ.

I. ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА

В. А. Омельченко

Для замены громоздкого одновременного анализа были разработаны методы спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени [1, 2], позволяющие производить одновременный анализ спектра без применения большого количества анализирующих фильтров. Однако характеристика разработанных методов лишь как методов квазисовременного анализа является ограниченной. Их сущность проявляется в возможности формировать в реальном масштабе времени спектры последовательных отрезков сигнала, т. е. в определенном смысле осуществлять аппаратный анализ математического спектра. Последнее открывает перед методами широкие возможности и приводит к необходимости их дальнейшего исследования.

В настоящей работе с единых позиций рассматриваются основные методы спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени; определяются их потенциальные и реальные возможности.

Вопросы общей теории спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени

Сначала рассмотрим общие принципы построения функциональных схем анализаторов, измеряющих в реальном масштабе времени спектры произвольных детерминированных сигналов. При этом потребуем, чтобы спектры измерялись в соответствии с математическим определением спектра.

Такая постановка задачи означает, что нам необходимо найти общие принципы построения функциональных схем устройств, которые в реальном масштабе времени синтезируют спектр произвольных детерминированных сигналов. Эти устройства правильнее назвать синтезаторами спектра, но в соответствии с установившейся терминологией будем говорить об анализаторах спектра и о спектральном анализе сигналов.

Поставленная задача может быть решена как задача синтеза функциональных схем устройств на основании способов выполнения преобразования Фурье, характерных для классов функций, которыми можно описать сигналы. Классы функций определяются свойствами произвольных сигналов обладать конечной энергией, существовать конечное время и иметь практически ограниченный спектр.

Таковыми классами являются следующие классы пространства $L_2(-\infty, \infty)$ функций с конечной энергией:

$L_{1,2}$ — абсолютно интегрируемых функций;

B — абсолютно интегрируемых функций с ограниченным спектром;

D_1 — абсолютно интегрируемых функций с конечной протяженностью во времени.

В классе $L_{1,2}$ справедлив обычный интегральный способ получения спектра

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (1)$$

Поэтому для осуществления спектрального анализа сигналов, описываемых функциями $f(t)$ из этого класса, следует выполнять операции, которые входят в определение спектра.

В классе B , а также в классе функций с ограниченным дискретным спектром спектр может быть разложен в ряд Фурье. В частности, если спектр сигнала из B при $\omega > 0$ сосредоточен в интервале от ω_1 до ω_2 , справедливо разложение

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_n \exp\left(-j \frac{2\pi n}{\omega_2 - \omega_1} \omega\right), \quad (2)$$

где

$$\bar{C}_n = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} \bar{g}\left(\frac{2\pi n}{\omega_2 - \omega_1}\right);$$

$g(jt) = f(t) + jh(t)$ — аналитический сигнал;

$h(t)$ — преобразование Гильберта для сигнала $f(t)$.

Отсюда видно, что задача спектрального анализа сигналов, описываемых функциями из этих классов, может быть сведена к задаче суммирования тригонометрических рядов.

В классе D_1 функций с конечной протяженностью во времени спектр может быть представлен рядом Котельникова. Если функция времени $f(t)$ тождественно равна нулю вне интервала от $-\frac{T}{2}$ до $\frac{T}{2}$, выражение для спектра имеет вид

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{S}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2} - \pi n\right)}{\frac{\omega T}{2} - \pi n}. \quad (3)$$

В этом случае задача спектрального анализа сводится к суммированию ряда Котельникова. Учитывая, что разложению (3) соответствует представление сигнала в виде ряда

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{S}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \exp\left(j \frac{2\pi n}{T} t\right), \quad (4)$$

коэффициенты Фурье которого пропорциональны отсчетам спектра на частотах $f_n = \frac{n}{T}$, в качестве первого приближения при спектральном анализе можно ограничиться разложением сигнала в ряд Фурье.

Выражения (1)—(3) позволяют синтезировать функциональные схемы анализаторов спектра, которые в реальном масштабе времени формируют спектр произвольных сигналов. Так как реальные анализаторы могут формировать в течение конечного времени спектр в ограниченной полосе частот, в действительности в этой полосе может быть измерен лишь мгновенный спектр $S_T(j\omega)$, представленный в интегральной форме

$$S_T(j\omega) = \int_0^T f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (1a)$$

или приближенно выраженный частичными суммами рядов Фурье (2) и Котельникова (3).

Погрешность представления $S_T(j\omega)$ частичной суммой ряда Фурье определяется погрешностью аппроксимации отрезка сигнала длительностью T частичной суммой ряда Котельникова. Соответственно погрешность представления $S_T(j\omega)$ частичной суммой ряда Котельникова определяется погрешностью аппроксимации отрезка сигнала длительностью T частичной суммой ряда Фурье.

Используя полученные результаты, рассмотрим интерференционный метод спектрального анализа.

1. Основные соотношения. Анализ сигналов с дискретным спектром

Синтезируем функциональную схему анализатора спектра, формирующего в реальном масштабе времени спектр сигнала

$$f(jt) = \exp(j\omega_i t) \quad (5)$$

в виде частичной суммы ряда Фурье. В силу линейности преобразования Фурье такой анализатор будет пригоден для анализа конечной суммы гармоник, т. е. произвольных сигналов с ограниченным дискретным спектром.

Разложим спектр

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_i)$$

сигнала (5) в ряд Фурье. Получим выражение

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(j2\pi n \frac{\omega - \omega_i}{\Omega}\right). \quad (6)$$

Заменяя в частичной сумме ряда (6) ω на t , ω_i на t_i , Ω на Δt , получим функцию

$$S_N(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j2\pi n \frac{t - t_i}{\Delta t}\right), \quad (7)$$

которую будем формировать в виде огибающей высокочастотного колебания. При этом приходим к выражению для отклика на выходе анализатора

$$y(t) = \operatorname{Re}[\exp(j\omega_0 t) S_N(jt)]. \quad (8)$$

Так как

$$S_N(jt) = S_N(t) \exp[j\varphi_N(t)],$$

где $S_N(t)$, $\varphi_N(t)$ — искомые амплитудный и фазовый спектры, выражение (8) для отклика можно привести к эквивалентному виду

$$y(t) = \operatorname{Re}\{\exp[j\omega_0 t + j\varphi_N(t)] S_N(t)\}. \quad (8a)$$

Отсюда следует, что измерение амплитудного и фазового спектров сводится к амплитудному и фазовому детектированию отклика.

Для синтеза функциональной схемы анализатора, формирующего при действии на входе сигнала (5) отклик (8a), представим (8) в виде

$$y(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \exp[j(\omega_i + n\Omega)(t - n\Delta t)], \quad (8b)$$

где

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Delta t};$$

$$\begin{aligned}\omega_l &= \omega_0; \\ \omega_l &= R\Omega + \omega_x; \\ \omega_x &= t_0 \frac{\Delta t}{\Omega};\end{aligned}$$

R — целое число.

Согласно (86), для формирования отклика необходимо формировать гармоники

$$\cos[(\omega_l + n\Omega)(t - n\Delta t)] \quad (9)$$

и производить их суммирование. При этом каждая из гармоник может быть получена из входного сигнала при преобразовании его частоты и задержке во времени по законам, вытекающим из (9). Соответствующие зависимости приращения угловой частоты $\Delta\Omega$ и задержки ΔT в функции номера n приведены на рис. 1.

Выражение (86) непосредственно определяет функциональную схему анализатора спектра, построенного на базе рециркулятора (рис. 2).

Для формирования отклика в виде (86) необходимо выбрать величину задержки линии задержки из условия

$$T_{л.з} = \Delta t; \quad (10)$$

частоту гетеродина схемы рис. 2а из условия

$$F = \frac{1}{T_{л.з}}; \quad (11)$$

закон изменения частоты гетеродина схемы рис. 2б в соответствии с графиком рис. 3.

При этом из отрезка сигнала $0 \leq t < T_{л.з}$ формируется N -й член суммы (86), из отрезка $T_{л.з} \leq t < 2T_{л.з}$ $(N-1)$ -й член и т. д.; отрезок сигнала $(N-1)T_{л.з} \leq t < NT_{л.з}$ определяет нулевой член суммы.

Так как отклик (86) формируется в результате интерференции N колебаний вида (9), рассматриваемый метод спектрального анализа называют интерференционным.

Анализ произвольных сигналов

Задача синтеза функциональной схемы анализатора спектра, формирующего спектр произвольных сигналов из B в виде частичной суммы ряда Фурье, может быть решена аналогичным образом.

Представим выражение (2) для спектра в виде

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{G}\left(n \frac{2\pi}{\Omega}\right) \exp\left(-j \frac{2\pi}{\Omega} n\right), \quad (2a)$$

где

$$\bar{G}\left(n \frac{2\pi}{\Omega}\right) = G\left(n \frac{2\pi}{\Omega}\right) \exp\left[j\varphi\left(n \frac{2\pi}{\Omega}\right)\right];$$

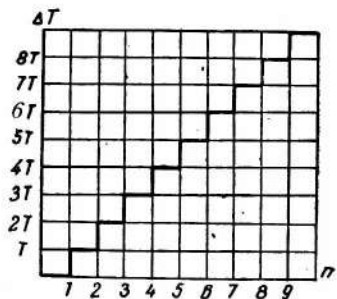
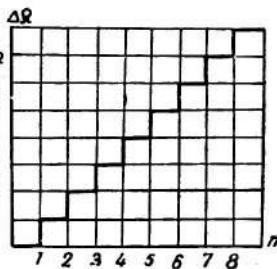


Рис. 1. Закономерности преобразования входного сигнала:

а — приращение частоты; б — задержка во времени.

$$G(t) \exp [j\varphi(t)] = g(jt);$$

$$G(t) = \sqrt{f^2(t) + h^2(t)};$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{h(t)}{f(t)};$$

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1.$$

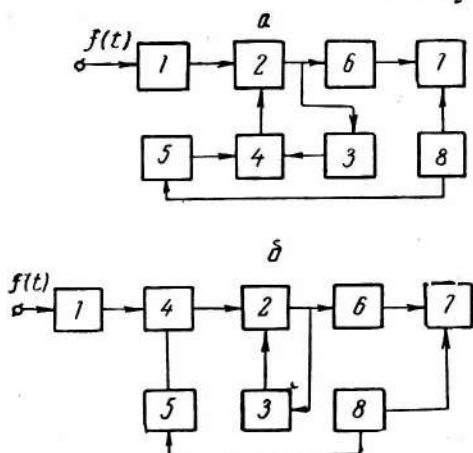


Рис. 2. Функциональная схема интерференционного анализатора спектра:

a — с внешним гетеродином; *б* — с гетеродином в кольце рециркулятора; $f(t)$ — входной сигнал; 1 — полосовой фильтр; 2 — сумматор; 3 — линия задержки; 4 — преобразователь частоты; 5 — гетеродин; 6 — детектор; 7 — индикатор; 8 — синхронизатор.

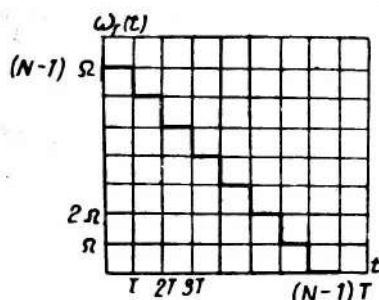


Рис. 3. Закономерности изменения частоты гетеродина анализатора.

Заменяя ω на t , Ω на Δt и ограничиваясь частичной суммой ряда, приходим к выражению

$$S_N(jt) = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{G}\left(n \frac{2\pi}{\Omega}\right) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{\Delta t} t\right), \quad (12)$$

которое может быть получено в виде огибающей высокочастотного колебания

$$y(t) = \operatorname{Re} [\exp(j\omega_0 t) S_N(jt)]. \quad (13)$$

Учитывая

$$S_N(jt) = S_N(t) \exp[j\varphi_N(t)], \quad (14)$$

представляем выражение (13) в виде

$$y(t) = S_N(t) \operatorname{Re} \{ \exp [j(\omega_0 t + \varphi_N(t))] \}, \quad (13a)$$

откуда видно, что и в общем случае амплитудный $S_N(t)$ и фазовый $\varphi_N(t)$ спектры могут быть получены при амплитудном и фазовом детектировании отклика на выходе анализатора.

Выражения (12) — (13) позволяют получить искомые функциональные схемы анализатора спектра. В частности, при $\omega_0 = \Omega R$, $\omega_0 \gg \Omega$, $\Delta t = T_{л.з}$ приходим к схеме рис. 2, что совпадает с результатом работы [3].

Таким образом, анализатор (рис. 2) может быть использован для спектрального анализа периодических и почти периодических сигналов, которые имеют дискретный спектр, а также для анализа произвольных нерегулярных сигналов.

2. Основные параметры анализатора

Функциональные схемы интерференционного анализатора (рис. 2) эквивалентны, так как на выходе обеих формируется отклик (86). Рассмотрим работу одной из них.

Входной сигнал, поступающий на вход линии задержки схемы рис. 2, а, задерживается на величину $T_{л.з}$, смещается по частоте на $F = \frac{1}{T_{л.з}}$ и вновь попадает на вход линии, где суммируется со входным сигналом. В течение последующего цикла преобразованию подвергается суммарный сигнал и т. д. В результате N циркуляций сигнала в рециркуляторе на выходе анализатора формируется отклик (86).

Полоса обзора

Выходной сигнал (86) содержит информацию о мгновенном спектре в полосе обзора Φ_0 , которая может быть найдена из условия однозначности в соответствии с (10) и (11):

$$\Phi_0 = \frac{1}{T_{л.з}}. \quad (15)$$

Отсюда видно, что Φ_0 полностью определяется величиной задержки линии задержки.

Время однократного анализа спектра

Процесс формирования мгновенного спектра в полосе Φ_0 происходит в реальном масштабе времени. При этом за время

$$T_0 = NT_{л.з} \quad (16)$$

в результате N циркуляций сигнала в рециркуляторе синтезируется N членов ряда Фурье.

На практике наибольшее применение получил периодический процесс анализа с периодом анализа

$$T_n = NT_{л.з} + \tau. \quad (17)$$

В этом случае в течение времени $NT_{л.з}$ осуществляется однократный анализ спектра, а за время $T_{л.з} \leq \tau \ll NT_{л.з}$ запасенная информация стирается и анализатор подготавливается для работы на последующем периоде.

Разрешающая способность анализатора спектра

При анализе сигналов с дискретным спектром в качестве основной метрологической характеристики анализатора принято понимать его разрешающую способность R по частоте.

Найдем зависимость R от основных параметров анализатора.

При действии на входе анализатора сигнала

$$f(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \quad (8a)$$

на выходе формируется отклик

$$y(t) = A_1 \sum_{n=0}^{N-1} \cos [(\omega_1 + n\Omega)(t - nT)] + A_2 \sum_{n=0}^{N-1} \cos [(\omega_2 + n\Omega)(t - nT)], \quad (8б)$$

представляющий собой сумму откликов

$$y_1(t) = A_1 \cos \left[\omega_1 t + \frac{N}{2} (\Omega t - \omega_{x1} T) \right] \times \\ \times \frac{\sin \frac{N}{2} (\Omega t - \omega_{x1} T)}{\sin \frac{1}{2} (\Omega t - \omega_{x1} T)}$$

и

$$y_2(t) = A_2 \cos \left[\omega_2 t + \frac{N}{2} (\Omega t - \omega_{x2} T) \right] \times \\ \times \frac{\sin \frac{N}{2} (\Omega t - \omega_{x2} T)}{\sin \frac{1}{2} (\Omega t - \omega_{x2} T)},$$

каждый из которых имеет форму высокочастотного колебания с огибающей вида $\frac{\sin Nx}{\sin x}$, т. е. лепестковую структуру.

Определяя разрешающую способность анализатора из условия превышения в ρ раз максимального значения огибающей от слабого сигнала над амплитудой бокового лепестка от сильного сигнала при $t = t_2 = \frac{T}{\Omega} \omega_{x2}$, получаем выражение

$$R = \frac{\rho}{\pi} D \frac{1}{NT_{л.з}}, \quad D \gg 1, \quad \frac{\Phi_0}{R} \gg 2, \quad (18)$$

где $D = \frac{A_1}{A_2}$ — динамический диапазон уровней сигнала.

Можно показать, что при $D = 1$ справедлива формула

$$R = \frac{1}{NT_{л.з}} = \frac{\Phi_0}{N}, \quad N \gg 2. \quad (18a)$$

Из (18) видно, что разрешающая способность по частоте в значительной степени зависит от динамического диапазона. Уменьшение влияния D на R возможно [4] при осуществлении коррекции боковых лепестков отклика путем весовой обработки входного сигнала в течение времени однократного анализа спектра T_0 .

В общем случае весовой обработки сигнала разрешающая способность может быть представлена в виде

$$R = \frac{1}{F(D, \varphi, \rho)} \frac{1}{NT_{л.з}}, \quad (18б)$$

где $f(D, \varphi, \rho)$ — функция, зависящая от весовой функции $\varphi(t)$, динамического диапазона D и критерия различимости ρ , причем, при $D \gg 1$ можно достигнуть соотношения $f(D, \varphi, \rho) \ll \frac{\rho}{\pi} D$. В частности, при весовой обработке сигнала функцией косинус-квадрат

$$f(D, \varphi, \rho) = \sqrt[3]{\frac{\rho}{\pi} D}.$$

Эквивалентная скорость анализа

Взаимосвязь основных параметров анализатора удобно представить через эквивалентную скорость анализа

$$\tau = \frac{\Phi_0}{T_0}. \quad (19)$$

В общем случае весовой обработки сигнала произвольной весовой функцией при $D \gg 1$ выражение (19) может быть приведено к виду

$$\tau = \frac{N}{f^2(D, \varphi, \rho)} R^2, \quad (20)$$

а в случае прямоугольной весовой функции при $D = 1$ — к виду

$$\tau = NR^2. \quad (20a)$$

Отсюда следует, что соотношение между основными параметрами анализатора в значительной мере определяется числом циркуляций сигнала в рециркуляторе.

Таковы основные особенности интерференционного метода спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени. Этот метод основан на способе выполнения преобразования Фурье, характерном для сигналов с ограниченным дискретным спектром и произвольных сигналов из класса B .

Методы спектрального анализа в реальном масштабе времени, основанные на способах выполнения преобразования Фурье в классах $L_{1,2}$ и D_1 будут рассмотрены во II и III части работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрих, Стейнберг. Панорамный анализатор спектра в реальном времени. «Зарубежная радиоэлектроника», 1960, № 7.
2. Ю. Г. Лободинский, Е. И. Оноприенко. Об анализе спектра устройством с дисперсией. «Радиотехника», 1966, № 10.
3. В. А. Письменецкий, В. А. Хорунжий. Измерение комплексного спектра узкополосных сигналов в реальном времени. «Радиотехника и электроника», 1969, № 11.
4. В. А.* Хорунжий, В. А. Омельченко, А. И. Игравков. Применение весовой обработки сигнала в спектроанализаторе с синфазным накоплением. Вестник Харьковского политехнического института, № 22 (70) «Радиотехника», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ. II ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА

В. А. Омельченко

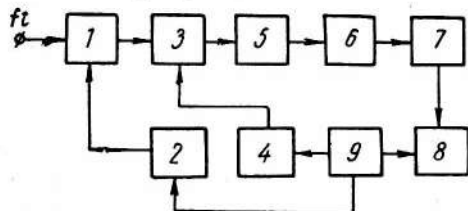
В данной статье рассматривается дисперсионный метод спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени, определяемый способом выполнения преобразования Фурье, характерным для класса $L_{1,2}$ абсолютно интегрируемых функций с конечной энергией.

1. Классы сигналов, анализируемых дисперсионным анализатором спектра

При спектральном анализе сигналов дисперсионным анализатором спектр может быть получен в интегральной форме [1] (см. рис.).

В этом случае входной сигнал $f(t)$ предварительно преобразуется в сигнал

$$x(t) = \begin{cases} f(t) \exp \left[2\pi j \left(f_0 t + \frac{t^2}{2\beta} + \psi_0 \right) \right]; & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1)$$



Функциональная схема дисперсионного анализатора спектра:

($f(t)$ — входной сигнал; 1 — устройство весовой обработки сигнала; 2 — генератор весовых функций; 3 — смеситель; 4 — генератор линейно изменяющейся частоты; 5 — фильтр; 6 — устройство с дисперсией; 7 — детектор; 8 — индикатор; 9 — синхронизатор.

и затем поступает на вход устройства с дисперсией, временная характеристика которого с достаточной степенью точности описывается выражением

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ \left[2\pi j - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + f_0 (t - \tau_0) + \varphi_0 \right] \right\}; & |t - \tau_0| \leq \frac{\Delta\tau}{2}, \\ 0, & |t - \tau_0| > \frac{\Delta\tau}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\beta = \frac{\Delta\tau}{\Delta f}$;

$\Delta\tau$ — рабочий диапазон задержек устройства с дисперсией;

Δf — ширина его частотной характеристики, имеющей центральную частоту f_0 ;

τ_0 — задержка на частоте f_0 ;

φ_0, ψ_0 — постоянные фазы.

В результате на выходе устройства с дисперсией формируется отклик

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

представляемый также в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (3a)$$

где

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau;$$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau.$$

Используя выражения (1)—(3a), уточним классы сигналов, для спектрального анализа которых может быть применен дисперсионный анализатор.

Известно [2], что равенство (3а) справедливо, если $g(t)$ и $x(t)$ являются абсолютно интегрируемыми функциями, т. е. выполняются условия

$$\begin{aligned} \text{а) } & \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty; \\ \text{б) } & \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

В соответствии с

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = \int_{-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\frac{\Delta\tau}{2}} \left| \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[-f_0(t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\} \right| dt < \infty \quad (4а')$$

и с учетом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| f(t) \exp \left[2\pi j \left(f_0 t + \frac{t^2}{2\beta} + \psi_0 \right) \right] \right| dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt \quad (4б')$$

условие (4) эквивалентно условию абсолютной интегрируемости входного сигнала при $|t| \leq \frac{T}{2}$.

Так как из

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$$

следует

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

окончательно получаем, что сигнал $f(t)$ при $|t| \leq \frac{T}{2}$ должен быть из класса $L_{1,2} \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right)$.

Таким образом, дисперсионный анализатор спектра можно использовать для спектрального анализа произвольных сигналов, которые при $|t| \leq \frac{T}{2}$ принадлежат классу $L_{1,2} \left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right)$. В частности, это могут быть сигналы

$$f(t) = \sum_{i=1}^M A_i \exp(2\pi j f_i t) \quad (5)$$

с дискретным спектром.

На выходе анализатора формируется спектр в интегральной форме, характерной для класса $L_{1,2}$.

2. Основные соотношения

Отклик (3) на выходе устройства с дисперсией можно представить в развернутом виде [1]:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[f_0(t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\} \times \\ &\times \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp \left[-2\pi j \left(-\frac{t-\tau_0}{\beta} x \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (3а)$$

Определяя входящее в это выражение время T взаимодействия сигнала с анализатором из условия, что все спектральные составляющие сигнала одновременно взаимодействуют с устройством с дисперсией, приводим (3а) к виду

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[f_0(t - \tau_0) - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\} \times \\ \times \int_{-(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}} f(x) \exp \left[-2\pi j \left(-\frac{t - \tau_0}{\beta} \right) x \right] dx. \quad (6)$$

Здесь

$$T = \left(1 - \frac{F}{\Delta f} \right) \Delta\tau; \quad (7)$$

F — ширина участка спектра, одновременно взаимодействующего с устройством с дисперсией, причем величина F выбирается из условия

$$F \leq \frac{\Delta f}{2}. \quad (8)$$

В этом выражении сомножитель

$$\exp \left\{ 2\pi j \left[f_0(t - \tau_0) - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\}$$

представляет собой быстро изменяющуюся функцию времени, а сомножитель

$$\int_{-(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}} f(x) \exp \left[-2\pi j \left(-\frac{t - \tau_0}{\beta} \right) x \right] dx$$

— медленно изменяющуюся функцию времени. Последний является мгновенным спектром сигнала $f(t)$.

В частном случае спектрального анализа сигналов с дискретным спектром возникают некоторые особенности.

Рассмотрим этот случай.

Допустим, что сигнал (5) умножается на весовую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} \neq 0, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

а затем линейно модулируется по частоте и подается на устройство с дисперсией. В результате формируется отклик

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[f_0(t - \tau_0) - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{i=1}^N A_i \int_{-(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}} \varphi(x) \exp \left[2\pi j \left(\frac{\tau_0 - t}{\beta} - f_i \right) x \right] dx \right\}. \quad (9)$$

Он представляет собой сумму радиопульсов

$$y_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[f_0(t - \tau_0) - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\} \times \\ \times A_i \int_{-(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}} \varphi(x) \exp \left[2\pi j \left(\frac{\tau_0 - t}{\beta} - f_i \right) x \right] dx,$$

огибающие которых совпадают со спектром весовой функции. Максимальные значения радиоимпульсов пропорциональны амплитудам составляющих сигнала (5), а временные положения максимумов соответствует их частотам.

Следовательно, огибающая отклика (9) является мгновенным спектром взвешенного сигнала. Поэтому выбором вида весовой функции можно корректировать форму отклика.

Выражения (6) и (9) определяют возможность спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени. При этом можно получить как амплитудный, так и фазовый мгновенный спектр.

Учитывая, что мгновенный спектр

$$S_T(jt) = \int_{-(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\frac{F}{\Delta f})\frac{\Delta\tau}{2}} f(x) \exp\left[-2\pi j\left(-\frac{t-\tau_0}{\beta}\right)x\right] dx$$

может быть представлен в виде

$$S_T(jt) = S_T(t) \exp[j\varphi_T(t)],$$

т. е. отклик (6) приведен к виду

$$y(t) = \frac{S_T(t)}{\sqrt{\beta}} \exp\left\{2\pi j\left[f_0(t-\tau_0) - \frac{(t-\tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_T(t) + \varphi_0\right]\right\}, \quad (6a)$$

видим, что искомым амплитудный $S_T(t)$ и фазовый $\varphi_T(t)$ спектры можно получить при амплитудном и фазовом детектировании отклика.

3. Основные параметры анализатора спектра

Дисперсионный метод спектрального анализа реализуется анализатором, функциональная схема которого приведена на рисунке.

Анализатор работает следующим образом.

Входной сигнал поступает на устройство весовой обработки, где он перемножается с весовой функцией, и далее подается на смеситель. Одновременно сюда поступает сигнал от генератора линейно изменяющейся частоты. Полученный на выходе смесителя сигнал проходит через полосовый фильтр, выделяющий область частот $|f_0 - f| \leq \frac{\Delta f}{4}$, и попадает на вход устройства с дисперсией. В результате преобразования последним через время T на выходе оказывается сформирован отклик, содержащий искомую информацию о спектре.

Полоса обзора

Отклик формируется в полосе обзора Φ_0 , которую можно определить из условия $\Phi_0 = F$. Тогда в соответствии с (8) получим выражение

$$\Phi_0 = \lambda \Delta f \quad (10)$$

где

$$\lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Величина Φ_0 совпадает с шириной участка спектра сигнала, одновременно взаимодействующего с устройством с дисперсией.

Время однократного анализа спектра

Время формирования спектра в полосе Φ_0 определяется выражением (7) и с учетом (10) может быть представлено в виде

$$T_0 = (1 - \lambda) \Delta\tau. \quad (11)$$

Если применяется периодический процесс анализа с периодом $T_n = T_0$, время T_0 является временем однократного анализа спектра. В этом режиме на выходе устройства с дисперсией формируются спектры примыкающих отрезков сигнала.

Разрешающая способность анализатора спектра

При анализе сигналов с дискретным спектром принято вводить разрешающую способность R анализатора по частоте.

Найдем R с учетом динамического диапазона уровней сигнала.

Пусть на входе анализатора действует сигнал

$$f(t) = A_1 \exp(2\pi j f_1 t) + A_2 \exp(2\pi j f_2 t),$$

где $\frac{A_1}{A_2} = D > 1$ — динамический диапазон уровней.

Тогда отклик на выходе устройства с дисперсией имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[f_0 (t - \tau_0) - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 + \varphi_0 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ A_1 \int_{-(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}} \varphi(x) \exp \left[-2\pi j \left(\frac{\tau_0 - t}{\beta} - f_1 \right) x \right] dx + \right. \\ \left. + A_2 \int_{-(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}}^{(1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2}} \varphi(x) \exp \left[-2\pi j \left(\frac{\tau_0 - t}{\beta} - f_2 \right) x \right] dx \right\}$$

и в случае прямоугольной весовой функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq (1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2} \\ 0, & |t| > (1-\lambda)\frac{\Delta\tau}{2} \end{cases}$$

представляет собой сумму радиоимпульсов

$$y_1(t) = \frac{A_1 \Delta\tau (1-\lambda)}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[f_0 (t - \tau_0) - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\} \times \\ \times \frac{\sin \left[\pi \Delta\tau (1-\lambda) \left(f_1 + \frac{t - \tau_0}{\beta} \right) \right]}{\pi \Delta\tau (1-\lambda) \left(f_1 + \frac{t - \tau_0}{\beta} \right)} \quad (12a)$$

и

$$y_2(t) = \frac{A_2 \Delta\tau (1-\lambda)}{\sqrt{\beta}} \exp \left\{ 2\pi j \left[f_0 (t - \tau_0) - \frac{(t - \tau_0)^2}{2\beta} + \varphi_0 \right] \right\} \times \\ \times \frac{\sin \left[\pi \Delta\tau (1-\lambda) \left(f_2 + \frac{t - \tau_0}{\beta} \right) \right]}{\pi \Delta\tau (1-\lambda) \left(f_2 + \frac{t - \tau_0}{\beta} \right)} \quad (12б)$$

с огибающими типа $\frac{\sin x}{x}$.

Определим разрешающую способность из условия превышения в p раз амплитуды малого радиоимпульса (12б) амплитуды бокового лепестка большого радиоимпульса (12a) при $t = t_2 = \tau_0 + \beta f_2$.

Выполняя аналогично работе [3] соответствующие вычисления, получим выражение

$$R = \frac{\rho}{\pi} D \frac{1}{\Delta\tau(1-\lambda)}, \quad D \gg 1. \quad (13)$$

Легко показать, что при $D = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ справедлива формула

$$R = \frac{2}{\Delta\tau} = \frac{2}{\lambda} \frac{\Phi_0}{K}, \quad (13a)$$

где $K = \Delta\tau\Delta f$ — коэффициент качества устройства с дисперсией.

Из выражения (13) следует, что при весовой обработке сигнала прямоугольной весовой функцией разрешающая способность анализатора сильно зависит от динамического диапазона. Это объясняется большим уровнем и малой скоростью убывания боковых лепестков отклика с огибающей вида $\frac{\sin x}{x}$.

Корректируя форму отклика путем весовой обработки соответствующими весовыми функциями, можно при $D \gg 1$ значительно уменьшить влияние D на R .

При выборе типа весовой функции следует иметь в виду, что разрешающая способность анализатора при малых D определяется шириной основного лепестка спектра весовой функции или уровнем его первых боковых лепестков, а при больших D — уровнем удаленных лепестков, т. е. практически скоростью убывания боковых лепестков спектра. Поэтому при $1 < D < 100$ удобной является весовая функция Хэмминга

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0,64 + 0,36 \cos \frac{2\pi t}{\Delta\tau(1-\lambda)}; & |t| \leq \frac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda); \\ 0, & |t| > \frac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda), \end{cases}$$

которая имеет достаточно узкий основной лепесток спектра и малый уровень первых боковых лепестков (максимальный уровень составляет 42 дБ [4]). При больших D рационально применять функцию Гаусса или функции косинус в степени n

$$\varphi(t) = \begin{cases} \cos^n \frac{\pi t}{\Delta\tau(1-\lambda)}, & |t| \leq \frac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda); \\ 0, & |t| > \frac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda); \end{cases}$$

спектр которых убывает [5] как $\frac{1}{f^{n+1}}$. В частности, при весовой обработке функцией косинус — квадрат

$$\varphi(t) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi t}{\Delta\tau(1-\lambda)}, & |t| \leq \frac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda); \\ 0, & |t| > \frac{\Delta\tau}{2}(1-\lambda), \end{cases}$$

соответствующей $n = 2$, для разрешающей способности справедлива зависимость

$$R = \sqrt[3]{\frac{\rho}{\pi} D \frac{1}{\Delta\tau(1-\lambda)}}, \quad D \gg 1, \quad (14)$$

откуда видно, что R значительно улучшается по сравнению с (13).

В общем случае при весовой обработке сигнала некоторой функцией $\varphi(t)$ разрешающая способность определяется выражением

$$R = f(D, \varphi, \rho) \frac{1}{\Delta\tau(1-\lambda)}, \quad (D \gg 1), \quad (15)$$

где $f(D, \varphi, \rho)$ — функция, зависящая от $\varphi(t)$, динамического диапазона и критерия различимости ρ . При этом для $D \gg 1$ может быть достигнуто соотношение $f(D, \varphi, \rho) \ll \frac{\rho}{\pi} D$.

Эквивалентная скорость анализа

Представим взаимосвязь основных параметров анализатора через скорость анализа

$$\gamma = \frac{\Phi_0}{T_0}. \quad (16)$$

В общем случае весовой обработки сигнала произвольной весовой функцией при $D \gg 1$ выражение (16) можно привести к виду

$$\gamma = \frac{\lambda(1-\lambda)K}{I^2(D, \varphi, \rho)} R^2. \quad (17)$$

Нетрудно показать, что при $D = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ в случае весовой обработки прямоугольной весовой функцией скорость анализа определяется в соответствии с

$$\gamma = \frac{K}{4} R^2. \quad (17a)$$

Отсюда видно, что взаимосвязь основных параметров анализатора существенно зависит от коэффициента качества устройства с дисперсией.

Описанный дисперсионный метод спектрального анализа сигналов в реальном масштабе времени определяется способом выполнения преобразования Фурье в классе $L_{1,2}$ абсолютно интегрируемых функций с конечной энергией. Метод спектрального анализа, основанный на способе выполнения преобразования Фурье в третьем из основных исследуемых классов, в классе D_1 абсолютно интегрируемых функций с конечной протяженностью во времени, будет рассмотрен в следующей, III части работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Лободинский, Е. И. Оноприенко. Об анализе спектра устройством с дисперсией. «Радиотехника», 1966, № 10.
2. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике теории связи в оптике. Физматгиз, 1962.
3. В. А. Омельченко. О влиянии динамического диапазона на разрешающую способность спектроанализатора. Сб. «Радиотехника», вып. 8. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
4. Тимс. Коррекция боковых лепестков в канале дальности радиолокационной станции со сжатием импульсов. «Зарубежная радиоэлектроника», 1963, № 5.
5. М. С. Гуревич. Спектры радиосигналов. Связьиздат, 1963.