НЕКОТОРЫЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА МАКСВЕЛЛА

В. А. Дикарев

ВВЕДЕНИЕ

Изучаемая в этой работе задача возникла в связи с применением М. С. Лившицем теории несамосопряженных операторов к вопросам распространения волн в радиоволноводах [1].

Рассмотрим волновод с осью OZ, однородный до некоторой точки на этой оси и заканчивающийся объемным резонатором.

Допустим, что нам заданы амплитуды $A_1, A_2, \ldots, A_n$ волн, идущих из бесконечности, а амплитуды $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ равны нулю. Требуется найти амплитуды B_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) отраженных волн и поле в области, расположенной правее сечения $z = 0$, включая объемный резонатор.

Если задана частота ω, то, как известно, вдоль волновода может распространяться конечное число поперечных электрических и магнитных волн, а все волны высшего порядка экспоненциально затухают.

Остановимся на случае, когда все отраженные волны затухающие, и выберем начало отсчета $z = 0$ достаточно удаленным от резонатора с тем, чтобы всеми затухающими колебаниями, кроме первых n (затухающих медленнее, чем остальные), можно было пренебречь при $z \leqslant 0$. Потерями также будем пренебрегать. Тогда поперечные составляющие поля при $z \leqslant 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu e^{-i\beta_\nu z} - B_\nu e^{i\beta_\nu z}) \sqrt{|\rho_\nu|}\, \vec{L}_\nu (x, y)\, e^{i\omega t}; \\ \vec{H}_t &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(A_\nu e^{-i\beta_\nu z} + B_\nu e^{i\beta_\nu z} \right) \frac{\sqrt{(\rho_\nu)}}{\rho_\nu}\, \vec{N}_\nu (x, y)\, e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{L}_\nu$, $\vec{N}_\nu = \vec{k} \times \vec{L}_\nu$ — известные ортонормированные собственные функции волновода; ρ_ν — волновые сопротивления, в случае затухающих колебаний ρ_ν — мнимые; $\vec{k}$ — орт вдоль оси OZ.

Как показано в работе [1], эта задача тесно связана с оператором Максвелла

$$Q \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} \\ i\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{E} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

действующим на шестимерных вектор-функциях $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$, заданных внутри части волновода Ω, лежащей правее плоскости $z = 0$.

Поверхность S, ограничивающая Ω, разбита на две части S_1 и Σ, где Σ — сечение волновода плоскостью $z = 0$.

В область определения данного оператора входят гладкие вектор-функции, удовлетворяющие следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} &\vec{E}_{t/S_1} = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma} \vec{H}_t \vec{G}_\nu^* d\sigma = 0; \quad \nu > n \\ &\rho_\nu \iint\limits_{\Sigma} \vec{H}_t \vec{G}_\nu^* d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} \vec{E}_t \vec{F}_\nu^* d\sigma, \quad \nu = 1, 2, \ldots n \end{aligned} \tag{3}$$

где $\vec{G}_\nu$, $\vec{F}_\nu$ — полные ортонормированные системы вектор-функций на Σ, причем $\vec{G}_\nu$, $\vec{F}_\nu$ лежат в плоскости сечения Σ и

$$\vec{G}_\nu = \vec{k} \times \vec{F}_\nu; \tag{4}$$

$\vec{k}$ — внутренний орт нормали к Σ.

Вектор $\vec{A}^* = A_x^* \vec{i} + A_y^* \vec{j} + A_z^* \vec{k}$,

где A_x^*, A_y^*, A_z^* — величины, комплексно сопряженные с A_x, A_y, A_z.

Оператор Максвелла с такой областью определения обозначим $\tilde{Q}_n'$.

Сделаем некоторые уточнения и замечания.

Будем считать, что область Ω односвязна и ограничивающая ее поверхность S дважды непрерывно дифференцируема. Таким образом, теперь не требуется, чтобы Σ было частью плоскости, но в то же время предполагается, что в точках раздела Σ и S поверхность также гладкая.

Вектор-функции $\vec{G}_\nu$, $\vec{F}_\nu$ будем считать непрерывными с первыми производными на Σ; кроме того, $\vec{G}_\nu \vec{k} = \vec{F}_\nu \cdot \vec{k} = 0$.

Для простоты записи в дальнейшем будем считать, что $\varepsilon = \mu = 1$, т. е.

$$Q\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \vec{H} \\ i \operatorname{rot} \vec{E} \end{pmatrix}.$$

Область определения оператора A, как это принято, обозначаем знаком D_A.

Очевидно, что множество вектор-функций $\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$ с естественно вводимыми операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр:

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{H}_1 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \vec{E}_2 \\ \vec{H}_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \end{pmatrix}; \quad \alpha\vec{f} = \begin{pmatrix} \alpha\vec{E} \\ \alpha\vec{H} \end{pmatrix}$$

и скалярным произведением

$$(\vec{f}_1 \vec{f}_2) = \iiint\limits_{\Omega} (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2^*)\, dv \tag{5}$$

является гильбертовским пространством, если $\vec{E}$, $\vec{H}$ — вектор-функции, интегрируемые с квадратом по Лебегу.

Вектор-функцию $\vec{f}\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}$ будем называть гладкой в Ω, если $\vec{E}$, $\vec{H}$ имеют в Ω все частные производные первого порядка, $\vec{E}$, $\vec{H}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $\operatorname{rot}\vec{E}$, $\operatorname{rot}\vec{H}$ интегрируемы с квадратом по Лебегу.

Для дальнейшего важно отличать замкнутый оператор от незамкнутого. То обстоятельство, что оператор не замкнут, будем отмечать знаком «штрих». Таким образом, например, оператор $\tilde{Q}_n'$ не замкнут, а оператор $\tilde{Q}_n$ замкнут.

Изложим вкратце содержание работы.

В § 1 устанавливается связь между операторами $\tilde{Q}_n'$ и Q_0', где Q_0' — оператор Максвелла такой, что $\vec{f}\in D_{Q_0'}$, если $\vec{E}_{t/S_1}=0$, $\vec{H}_{t/\Sigma}=0$.

В работе [2] показано, что оператор Q_0 самосопряженный.

Выясняется, что область определения $D_{\tilde{Q}_n'}$ оператора $\tilde{Q}_0'$ получается из $D_{Q_0'}$ в результате расширения области определения $D_{Q_0'}$ и последующего ее сужения по определенному правилу.

Далее приводится доказательство вспомогательной теоремы, на основании которой и того, что оператор Q_0 самосопряженный [2], следует самосопряженность оператора $\tilde{Q}_n$.

В § 2 доказывается, что оператор, порождаемый оператором $\tilde{Q}_n$ на ортогональном дополнении к его нулевому подпространству, имеет вполне непрерывный обратный.

§ 1. Докажем самосопряженность оператора $\tilde{Q}_n$. Рассмотрим n векторов $\{\vec{f}_\nu\}_{\nu=1}^n$, где вектор $\vec{f}_\nu=\begin{pmatrix}\vec{E}_\nu\\ \vec{H}_\nu\end{pmatrix}$ удовлетворяет следующим краевым условиям: $\vec{E}_\nu$, $\vec{H}_\nu$ — гладкие в Ω вектор-функции:

$$\vec{E}_{\nu t/S_1}=0;\quad \vec{E}_{\nu t/\Sigma}=\rho_\nu\vec{F}_\nu;\quad \vec{H}_{\nu t/\Sigma}=\vec{G}_\nu. \tag{1,1}$$

(Задачу о нахождении векторов $\vec{f}_\nu$ см., например, в [3]).

Заметим, что условиями (1, 1) вектор $\vec{f}_\nu$ определяется неоднозначно.

Лемма 1. Рассмотрим линеал V_n', образованный векторами из $D_{Q_0'}$ и из $\{\vec{f}_\nu\}_{\nu=1}^n$. Отберем из V_n' множество W_n' векторов $\vec{\psi}$ таких, что $\vec{\psi}\in W_n'$, если

$$(Q\vec{\psi},\vec{f}_\nu)=(\vec{\psi},Q\vec{f}_\nu),\quad \nu=1,2,\ldots,n \tag{2,1}$$

Тогда $D_{\tilde{Q}_n'}=W_n'$.

Доказательство. Очевидно, что W_n' является линейным многообразием.

Проверим прежде всего, что

$$(Q\vec{f}_\nu,\vec{f}_\mu)-(\vec{f}_\nu,Q\vec{f}_\mu)=0. \tag{3,1}$$

Последнее означает, что $f_\nu\in W_n'$:

$$(Q\vec{f}_\nu,\vec{f}_\mu)-(\vec{f}_\nu,Q\vec{f}_\mu)=\iiint\limits_{\Omega}(-i\operatorname{rot}\vec{H}_\nu\vec{E}_\mu^*+i\operatorname{rot}\vec{E}_\nu\vec{H}_\mu^*-i\vec{E}_\nu\operatorname{rot}\vec{H}_\mu^*+$$

$$+i\vec{H}_\nu\cdot\operatorname{rot}\vec{E}_\mu^*)\,dv=$$

$$=i\iiint\limits_{\Omega}\{(\operatorname{rot}\vec{E}_\nu\vec{H}_\mu^*-\vec{E}_\nu\operatorname{rot}\vec{H}_\mu^*)-(\operatorname{rot}\vec{H}_\nu\vec{E}_\mu^*-\vec{H}_\nu\operatorname{rot}\vec{E}_\mu^*)\}\,dv.$$

Воспользовавшись известной из векторного анализа формулой

$$\operatorname{div}(\vec{A}\times B)=\vec{B}\operatorname{rot}\vec{A}-\vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$$

и свойствами дивергенции, имеем

$$(Q\vec{f}_\nu,\ f_\mu)-(\vec{f}_\nu,\ Q\vec{f}_\mu)=i\iint\limits_{S_1+\Sigma}\{(\vec{E}_\nu,\vec{H}^*_\mu,\ \vec{k})+(\vec{E}^*_\mu,\vec{H}_\nu,\vec{k})\}\,d\sigma;$$

так как $\vec{E}_{\nu t/S_1}=0$, то

$$(Q\vec{f}_\nu,\vec{f}_\mu)-(\vec{f}_\nu,\ Q\vec{f}_\mu)=i\iint\limits_{\Sigma}\{(\vec{E}_{\nu t},\vec{H}^*_{\mu t},\vec{k})+(\vec{E}^*_{\mu t},\vec{H}_{\nu t},\vec{k})\}\,d\sigma.$$

Учитывая краевые условия (1,1), получим

$$(Q\vec{f}_\nu,\vec{f}_\mu)-(\vec{f}_\nu,\ Q\vec{f}_\mu)=i\iint\limits_{\Sigma}\{(\rho_\nu\vec{F}_\nu,\vec{G}_\mu,\vec{k})+(\rho^*_\mu\vec{F}^*_\mu,\vec{G}_\nu,\vec{k})\}\,d\sigma.$$

В силу соотношения (4) имеем

$$(Q\vec{f}_\nu,\vec{f}_\mu)-(\vec{f}_\nu,\ Q\vec{f}_\mu)=i\{\rho_\nu\iint\limits_{\Sigma}\vec{G}_\nu\vec{G}^*_\mu\,d\sigma+\rho^*_\mu\iint\limits_{\Sigma}\vec{G}_\nu\vec{G}^*_\mu\,d\sigma\}.$$

Правая часть последнего равенства равна нулю, так как при $\nu\neq\mu$ каждый из интегралов обращается в нуль, а при $\nu=\mu$ $\rho_\nu+\rho^*_\mu=0$, так как ρ_ν — мнимое число.

Пусть далее $\vec{\varphi}$ — любой вектор из W'_n.

Тогда

$$(Q\vec{\varphi},\vec{f}_\nu)-(\vec{\varphi},\ Q\vec{f}_\nu)=i\iiint\limits_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{H}\vec{E}^*_\nu+\operatorname{rot}\vec{E}\vec{H}^*_\nu-\vec{E}\operatorname{rot}H^*_\nu+\vec{H}\operatorname{rot}\vec{H}^*_\nu)\,dv=$$

$$=i\iint\limits_{\Sigma}(\vec{E},\vec{H}^*_\nu,\vec{k})\,d\sigma-i\iint\limits_{\Sigma}(\vec{H},\ \vec{E}^*_\nu,\vec{k})\,d\sigma=0$$

или

$$\iint\limits_{\Sigma}(\vec{E}_t,\ \vec{H}^*_{\nu t},\vec{k})\,d\sigma=\iint\limits_{\Sigma}(\vec{H}_t,\ \vec{E}^*_{\nu t},\vec{k})\,d\sigma.$$

Принимая во внимание краевые условия (1,1) и то, что для компоненты H вектора φ, $\varphi\in V'_n$ справедливо соотношение

$$\vec{H}_{t/\Sigma}=\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu\vec{G}_\mu,\quad \alpha_\mu=\iint\limits_{\Sigma}H_t\vec{G}^*_\mu\,d\sigma. \tag{4,1}$$

Получим

$$\iint\limits_{\Sigma}(\vec{E}_t,\vec{G}^*_\nu,\vec{k})\,d\sigma=\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu\iint\limits_{\Sigma}(\vec{G}_\mu,\ \rho^*\vec{F}^*_\nu,\vec{k})\,d\sigma$$

или, учитывая формулы (3), (4), попарную ортогональность G_ν и значение α_μ из (4,1):

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{E}_t\vec{F}^*_\nu\,d\sigma=-\rho^*\iint\limits_{\Sigma}\vec{G}_\nu\vec{G}^*_\nu\,d\sigma\iint\limits_{\Sigma}\vec{H}_t\vec{G}^*_\nu\,d\sigma=\rho_\nu\iint\limits_{\Sigma}\vec{H}_t\vec{G}^*_\nu\,d\sigma, \tag{5,1}$$

т. е. действительно $\varphi\in D_{\tilde{Q}'_n}$ и, значит, $D_{\tilde{Q}'_n}\supseteq W'_n$; так как для любого вектора из $D_{\tilde{Q}'_n}$ выполняются условия (3), то имеет место также обратное включение $D_{\tilde{Q}'_n}\subset W'_n$.

Следовательно $D_{\tilde{Q}'_n}=W'_n$

Лемма 2. Пусть A — самосопряженный оператор и векторы f_ν, $\nu = 1, 2, \dots, n$ таковы, что $f_\nu \bar{\in} D_A$. Построим оператор $A_n \supset A$ следующим образом:

$$Af_\nu = g_\nu; \quad (g_\nu, f_\mu) = (f_\nu, g_\mu). \tag{6,1}$$

Отберем из D_{A_n} множество W_n векторов ψ таких, что $\psi \in W_n$, если

$$(A_n\psi, f_\nu) = (\psi, g_\nu). \quad \nu = 1, 2, \dots n \tag{7,1}$$

Рассмотрим оператор $\tilde{A}_n \subset A_n$, область определения которого $D_{\tilde{A}_n} = W_n$.

Оператор $\tilde{A}_n$ самосопряженный.

Доказательство. Рассмотрим график оператора A_n, $M(A_n)$. Очевидно, что $M(A_n)$ является подпространством гильбертова пространства H.

Любой вектор $F \in M(A_n)$ имеет вид

$$F = \{f, A_n f\} = \{\varphi + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f_\nu, A\varphi + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu\}, \tag{8,1}$$

где $\varphi \in D_A$. Перепишем формулу (7,1) в виде

$$(\{\psi, A_n\psi\}, \{g_\nu, -f_\nu\}) = 0. \quad \nu = 1, 2, \dots, n \tag{9,1}$$

Последнее означает, что в график оператора $\tilde{A}_n$, $M(\tilde{A}_n)$ входят только те векторы $\Psi = \{\psi, A_n\psi\}$, $\Psi \in M(A_n)$, которые ортогональны векторам $\{g_\nu, -f_\nu\}$.

Из условий (6,1) следует, что

$$(\{f_\nu, g_\nu\}, \{g_\mu, -f_\mu\}) = 0. \tag{10,1}$$

Поэтому $\{f_\nu, g_\nu\} \in M(\tilde{A}_n)$. $\nu = 1, 2, \dots, n$

Кроме того, в $M(\tilde{A}_n)$ войдут те векторы $\{\varphi, A_n\varphi\}$ из графика оператора A, $M(A)$, которые удовлетворяют соотношению (9,1).

Покажем, что $M(\tilde{A}_n) = M(\tilde{A}_n^*)$. С этой целью выясним, каким образом можно получить $M(\tilde{A}_n^*)$ из $M(A^*) = M(A)$.

Известно [4], что для любого замкнутого оператора T имеет место соотношение

$$H \ominus M(T) = UM(T^*), \tag{11,1}$$

где U — унитарный оператор $U\{f, g\} = \{ig, -if\}$.

В силу условий (9,1) $M(A_n)$ можно получить, образуя линейную оболочку векторов из $M(A)$ и векторов $\{f_\nu, g_\nu\}$.

Из формулы (11,1) имеем

$$UM(A) = UM(A^*) = H \ominus M(A)$$

и

$$UM(A_n^*) = H \ominus M(A_n).$$

Поэтому, чтобы получить $UM(A_n^*)$, надо в $UM(A)$ оставить только те векторы, которые ортогональны векторам $\{f_\nu, g_\nu\}$. Но

$$\{f_\nu, g_\nu\} = U\{ig_\nu, -if_\nu\} = iU\{g_\nu, -f_\nu\},$$

т. е. в $UM(A_n^*)$ войдут только те векторы из $UM(A)$, которые ортогональны векторам $U\{g_\nu, -f_\nu\}$.

Следовательно, в $M(A_n^*)$ войдут такие векторы из $M(A)$, которые ортогональны векторам $\{g_\nu, -f_\nu\}$, т. е. векторы, удовлетворяющие формуле (9,1).

Так как в $M(\tilde{A}_n)$ входят те векторы из $M(A_n)$, которые удовлетворяют (9,1) и так как из (11,1) имеем

$$H \ominus M(\tilde{A}_n) = UM(\tilde{A}_n^*),$$

то ясно, что $UM(\tilde{A}_n^*)$ можно получить, образуя линейную оболочку векторов из $UM(A_n^*)$ и векторов $\{g_\nu, -f_\nu\}$ $\nu = 1, 2, \ldots n$. Но

$$\{g_\nu, -f_\nu\} = U\{-if_\nu, -ig_\nu\} = -iU\{f_\nu, g_\nu\}.$$

Таким образом, $M(\tilde{A}_n^*)$ можно получить, образуя линейную оболочку векторов из $M(A_n^*)$ и векторов $\{f_\nu, g_\nu\}$.

В силу этого $M(\tilde{A}_n) = M(\tilde{A}_n^*)$, отсюда и следует самосопряженность оператора $\tilde{A}_n$.

Из только что доказанной леммы еще нельзя заключить, что оператор $\tilde{Q}_n$ сопряженный, так как хотя $D_{\tilde{Q}_n'}$ получается из $D_{Q_0'}$ принципиально тем же способом, что и $D_{\tilde{A}_n}$ из D_A в последней лемме, но, в отличие от A, Q_0' не замкнут.

В связи с этим рассмотрим оператор A', замыкание которого $\bar{A}' = A$. Пусть далее $A_n \supset A_n' \supset A'$, $A_n' f_\nu = g_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$D_{A_n'} \cap D_A = D_{A'}$$

и оператор $\tilde{A}_n' \subset A_n'$ такой, что $\psi \in D_{\tilde{A}_n'}$, если $\psi \in D_{A_n'}$ и удовлетворяет (7,1).

Покажем, что замыкание оператора $\tilde{A}_n'$ $\bar{\tilde{A}}_n' = \tilde{A}_n$. Для этого достаточно показать, что множество $M(\tilde{A}_n')$ плотно в $M(\tilde{A}_n)$. Очевидно, $M(A_n')$ плотно в $M(A_n)$. И остается проверить, что множество векторов из $M(A_n')$, удовлетворяющее формуле (9,1), плотно в $M(\tilde{A}_n)$. Последнее верно, так как имеет место

Лемма 3. Пусть D — плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие. H_1 — подпространство H, причем $H_2 = H \ominus H_1$ имеет конечную размерность. Тогда $H_1 \cap D$ плотно в H_1.

Доказательство этой леммы см. в [5].

Таким образом, самосопряженность оператора $\tilde{Q}_n$ установлена.

§ 2. В § 1 было показано, что в $D_{A_n^*}$ входят такие векторы $\varphi \in D_A$, которые удовлетворяют (7,1). Отсюда следует, что $A_n^* \subset A$. Ввиду того, что оператор A_n определен на всюду плотном в H множестве и оператор A_n^* сопряженный к нему, то $D_{A_n^*}$ также плотно в H и, следовательно, A_n^* — симметрический оператор.

Из изложенного ранее следует также, что если $\varphi \in D_A$ и $\varphi \in D_{\tilde{A}_n}$, то $\varphi \in D_{A_n^*}$. Это означает, что A_n^* — максимальная общая часть операторов A и $\tilde{A}_n$ и что A и $\tilde{A}_n$ — взаимно простые самосопряженные расширения оператора A_n^*. Ясно также, что индексы дефекта оператора A_n^* равны (n, n).

Пусть λ — произвольная общая точка регулярности операторов A, $\tilde{A}_n$ и R_λ, $\tilde{R}_\lambda$ — их резольвенты. Формула Крейна для резольвент самосопряженных расширений оператора A_n^* [6] дает связь между R_λ и $\tilde{R}_\lambda$:

$$\tilde{R}_\lambda f = R_\lambda f + \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik}(\lambda)(f, \psi_i(\bar{\lambda}))\psi_k(\lambda). \tag{1,2}$$

Здесь $\psi_i(\bar{\lambda})$ — полная система линейно независимых векторов из подпространства $H_{n\lambda} = H \ominus (A_n^* - \lambda I) D_{A_n^*}$;

$\psi_k(\lambda)$ — полная система линейно независимых векторов из подпространства $H_{n\bar{\lambda}} = H \ominus (A_n^* - \bar{\lambda} I) D_{A_n^*}$;

n — размерность $H_{n\lambda}$ и $H_{n\bar{\lambda}}$.

Теорема. Оператор $\tilde{A}_n$ на ортогональном дополнении к его нулевому подпространству имеет вполне непрерывный обратный.

Доказательство. Достаточно показать, что резольвента $\tilde{R}_\lambda$ имеет точечный спектр с единственной предельной точкой в нуле и что любое собственное подпространство $\tilde{R}_\lambda$ с собственным числом, отличным от $-\frac{1}{\lambda}$, конечномерно.

Пусть U_A — нулевое подпространство оператора A, V — подпространство такое, что $V \subset U_A$ и для любого вектора f из V выполняется условие

$$(f, \psi_i(\bar{\lambda})) = 0. \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2,2}$$

Из (1,2) следует, что $V \subseteq U_{\tilde{A}_n}$, где $U_{\tilde{A}_n}$ — нулевое подпространство оператора $\tilde{A}_n$. Так как операторы A, $\tilde{A}_n$ самосопряженные, то V и $H \ominus V$ являются инвариантными подпространствами для R_λ и $\tilde{R}_\lambda$. Поэтому каждый из этих операторов можно рассматривать в виде

$$\tilde{R}_\lambda = \tilde{R}_{1\lambda} + \tilde{R}_{2\lambda}; \quad R_\lambda = R_{1\lambda} + R_{2\lambda}, \tag{3,2}$$

где $R_{1\lambda}$, $\tilde{R}_{1\lambda}$ — операторы, порождаемые операторами R_λ, $\tilde{R}_\lambda$ на подпространстве $H \ominus V$;

$R_{2\lambda}$, $\tilde{R}_{2\lambda}$ — операторы, порождаемые операторами R_λ, $\tilde{R}_\lambda$ на подпространстве V.

Отсюда и из (1,2) имеем

$$\tilde{R}_{1\lambda} = R_{1\lambda} + \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik}(\lambda)(\cdot, \psi_i(\bar{\lambda}))\psi_k(\lambda).$$

Оператор $R_{1\lambda}$ имеет точечный спектр с единственной предельной точкой в нуле, и все его собственные подпространства конечномерны. Поэтому $R_{1\lambda}$ — вполне непрерывный оператор. Оператор

$$\sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik}(\lambda)(\cdot, \psi_i(\bar{\lambda}))\psi_k(\lambda)$$

также вполне непрерывный. Отсюда следует вполне непрерывность оператора $\tilde{R}_{1\lambda}$.

Оператор $\tilde{R}_{2\lambda}$ таков что $\tilde{R}_{2\lambda} f = -\frac{1}{\lambda} f$.

Из только что рассмотренного вытекают все утверждения о характере спектра оператора $\tilde{R}_\lambda$. Теорема доказана.

В силу самосопряженности оператора $\tilde{Q}_n$ и последней теоремы следует, что $\tilde{Q}_n$ имеет полную ортогональную систему собственных вектор-функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц. Метод несамосопряженных операторов в теории волноводов. «Радиотехника и электроника», 1962, т. VII, 281 — 297.

2. Э. Б. Быховский. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы. «Вестн. ЛГУ», 1957, № 13, 50—56.

3. О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961, 30 — 33.

4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5, М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959, 559 — 561.

5. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., Физматгиз, 1963, 46 — 47.

6. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., Гостехиздат, 1950, 344 — 350.