

# МНОГОПОЛЮСНИКИ КАК ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ

А. Г. Руткас

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Совокупность точек  $X$  (вершин) и отрезков линий  $\Gamma$  (ребер), соединяющих эти точки, называется мультиграфом и обозначается  $G = (X, \Gamma)$ . В дальнейшем предполагается, что каждому ребру  $q$  приписано направление — и тогда оно считается дугой  $\vec{q}$ . Цепь — это последовательность ребер  $q_1, q_2, \dots, q_n$  такая, что из вершины ребра  $q_1$  можно, непрерывно двигаясь по ребрам цепи, попасть в вершину ребра  $q_n$ , пройдя по всем ребрам последовательности. Цикл  $Q$  — это цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одной вершине. Цикл, при обходе которого каждая вершина встречается один раз (за исключением начала и конца обхода), называется элементарным. Мультиграф связан, если любые две вершины соединяются хотя бы одной цепью, и двусвязен — когда любые две вершины одновременно принадлежат некоторому элементарному виду. Ребра (дуги) мультиграфа можно перенумеровать:  $q_1, \dots, q_R$ .

Циклу  $Q$  ставится в соответствие вектор-цикл  $\vec{Q}$ , принадлежащий координатному  $R$ -мерному пространству  $H_R$ . Если при обходе  $Q$  дуга  $q_i$  проходится  $r_i$  раз в направлении ее ориентации и  $s_i$  раз — в противоположном, то  $\vec{Q} = (c_1, \dots, c_R)$ , где  $c_i = r_i - s_i$ . Для элементарного цикла  $c_i = 0, 1$  или  $-1$ . Циклы  $Q_1, \dots, Q_M$  считаются независимыми в случае линейной независимости соответствующих вектор-циклов. Цикломатическое число связанного мультиграфа  $G$  — это величина  $M = |\Gamma| - |X| + 1$ , где  $|X|$  — количество вершин,  $|\Gamma|$  — количество дуг. Известно, что наибольшее число независимых циклов равно  $M$  [1]. Всякое  $M$  независимых циклов (соответственно вектор-циклов) называется базисом мультиграфа. Связный граф без циклов ( $M = 0$ ) называется деревом.

Через  $H_M$  здесь обозначается линейная оболочка некоторых элементарных вектор-циклов  $\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M = \{\vec{Q}_k\}_{k=1}^M$ , составляющих базис мультиграфа  $G$ . Оболочка  $H_M$  является  $M$ -мерным подпространством координатного пространства  $H_R$ ,  $M < R$ . Имеет место

**Лемма 1.** Если вектор  $\vec{Q} = (c_1, c_2, \dots, c_R)$  принадлежит  $H_M$  и некоторые его компоненты  $c_i = 0$  ( $i = i_1, i_2, \dots, i_n$ ), то в  $G$  существует набор независимых элементарных циклов  $\{Q'_k\}_{k=1}^r$  такой, что  $\vec{Q} = \sum_{k=1}^r a_k \vec{Q}'_k$ ,

а у вектор-циклов  $\vec{Q}'_k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_R^k)$  компоненты  $c_i^k = 0$  при всех  $i = i_1, i_2, \dots, i_n$ ;  $k = 1, 2, \dots, r$ .

При  $M = 2$  утверждение леммы более или менее легко проверяется; общий результат устанавливается по индукции.

Электрическая цепь — это мультиграф  $G = (X, \Gamma)$ , у которого каждая дуга  $\vec{q}_i$  заменена электрическим двухполюсником с током  $I_i$  и напряжением  $U_i$ . Часть цепи  $G$  называется передающим многополюсником (4  $m$ -полюсником)  $\Phi$ , если из  $G$  удалены  $2m$  двухполюсников, а в  $\Phi$  указаны внешние клеммы, откуда они удалялись (сх. 1). Исходная цепь  $G$  называется замкнутым многополюсником  $\bar{\Phi}$ . Предполагается, что внутренние ребра  $\Phi$  суть индуктивности и емкости (сх. 2) с дифференциальными уравнениями:

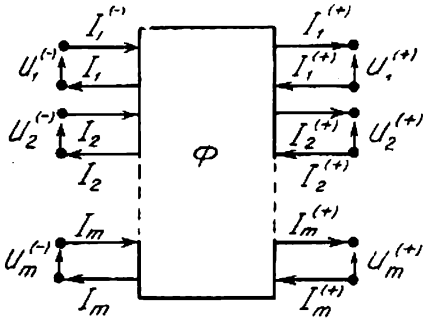


Схема 1.

$U_{Lj} = L_j \frac{dI_{Lj}}{dt}; \quad I_{Ck} = C_k \frac{dU_{Ck}}{dt}. \quad (1)$

Току  $I_i$  присывается направление дуги  $\vec{q}_i \in G$ ; направление напряжения  $U_i$  совпадает с направлением  $I_i$  на половине внешних ребер (в сх. 1 это напряжение  $U_k^{(-)}$ ) и противоположно на остальных ребрах

( $U_k^{(+)}$  в сх. 2). В режиме гармонических колебаний можно перейти к амплитудным значениям токов и напряжений в  $G$ , сохранив для них обозначения  $U_i, I_i$ . Уравнения (1) переписутся так:

$$U_{Lj} = i\omega L_j I_{Lj}; \quad I_{Ck} = i\omega C_k U_{Ck}. \quad (2)$$

Постулируются также уравнения Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений по циклу  $Q$  равна нулю

$$\sum_i U_i = 0, \quad (3)$$

алгебраическая сумма токов в вершине  $X_k \in G$  равна нулю

$$\sum_i I_i = 0. \quad (4)$$

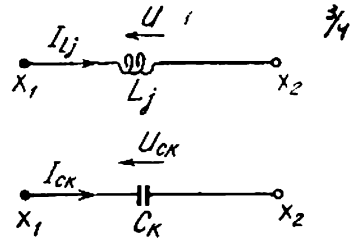


Схема 2.

### § 2. ОПЕРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС

Рассмотрим задачу определения всех токов и напряжений в  $G = \bar{\Phi}$  по заданным величинам  $U_1^{(-)}, \dots, U_m^{(-)}; I_m^{(-)}, \dots, I_1^{(-)}$ . Введя векторы  $\vec{\varphi}^{(-)} = (U_1^{(-)}, \dots, U_m^{(-)}; I_m^{(-)}, \dots, I_1^{(-)})$ ,  $\vec{\varphi}^{(+)} = (U_1^{(+)}, \dots, U_m^{(+)}; I_m^{(+)}, \dots, I_1^{(+)})$ ,  $\vec{\psi} = (\sqrt{L_1} I_{L1}, \dots, \sqrt{L_\mu} I_{L\mu}; \sqrt{C_{\mu+1}} U_{C(\mu+1)}, \dots, \sqrt{C_N} U_{CN})$ , можно заменить указанную задачу равносильной: найти векторы  $\vec{\varphi}^{(+)}$  и  $\vec{\psi}$  по заданному  $\vec{\varphi}^{(-)}$ . Здесь  $\mu$  — число всех индуктивностей в  $G$ .  $N - \mu = \gamma$  — число емкостей. В силу линейности уравнений (2), (3), (4) при положительном исходе задачи векторы  $\vec{\psi}$ ,  $\vec{\varphi}^{(+)}$  связаны с  $\vec{\varphi}^{(-)}$  линейными отображениями (матрицами)  $R(\omega)$  и  $S(\omega)$ :

$$\vec{\psi} = R(\omega) \vec{\varphi}^{(-)}; \quad (5)$$

$$\vec{\varphi}^{(+)} = S(\omega) \vec{\varphi}^{(-)}. \quad (6)$$

Матрица  $S(\omega)$  называется передаточной матрицей многополюсника.

Пусть  $T$  — квадратная матрица порядка  $N$ , элементы которой — комплексные постоянные  $t_{jk}$ ; в координатном  $N$ -мерном пространстве  $H$  матрица  $T$  задает линейный оператор  $T$ , действующий в  $H$ . Аналогично в  $n$ -мерном пространстве  $E$  с базисом  $\vec{a}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{a}_n = (0, \dots, 0, 1)$  некоторая квадратная матрица  $J = \|J_{\alpha\beta}\|$  задает оператор  $J$ . Согласно определению,  $\vec{\psi}$  принадлежит  $H$  ( $\vec{\psi} \in H$ ), а при  $n = 2m$   $\vec{\varphi}^{(-)}, \vec{\varphi}^{(+)}$   $\in E$ . По отношению к многополюснику  $\Phi$  вектор  $\vec{\varphi}^{(-)}$  называется входным,  $\vec{\varphi}^{(+)}$  — выходным,  $\vec{\psi}$  — вектором внутренних состояний,  $H$  — пространством внутренних состояний,  $E$  — пространством входов и выходов.

Приведем три определения из теории открытых систем М. С. Лившица [6. 7]:

I. Открытой системой  $F$  называется совокупность двух линейных отображений  $R(\omega)$  и  $S(\omega)$ , действующих в соответствии с (5), (6), что схематично можно изобразить так:

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{S(\omega)} E \\ \xleftarrow{R(\omega)} H \end{array}$$

II. Операторный комплекс  $[T, e_\alpha, J]$  — это совокупность оператора  $T$ , оператора  $J$  ( $J = J^*$ ,  $J^2 = I$ ) и векторов  $\vec{e}_\alpha$  ( $\vec{e}_\alpha \in H$ ),  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , для которой выполняется соотношение

$$\frac{T - T^*}{i} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) J_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta. \tag{7}$$

Векторы  $\vec{e}_\alpha$  называются каналовыми векторами оператора  $T$ .

III. Операторный комплекс  $[T, e_\alpha, J]$  принадлежит открытой системе  $F$ , если он связан с отображениями (5), (6) следующим образом:

$$(T - \omega I) \vec{\psi} = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^{(-)} \vec{e}_\alpha; \tag{8}$$

$$\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} - i \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) J \vec{a}_\alpha, \tag{9}$$

где  $\varphi_\alpha^{(-)} = (\vec{\varphi}^{(-)}, \vec{a}_\alpha)$  — компоненты вектора  $\vec{\varphi}^{(-)}$ .

При наличии отображений (5), (6) многополюсник  $\Phi$  является открытой системой. Всегда ли существует операторный комплекс  $[T, e_\alpha, J]$ , принадлежащий  $\Phi$ , и как его записать — вот вопросы, которые следует выяснить в первую очередь. Правые части уравнений (2) выражены через компоненты вектора  $\vec{\psi}$ ; если левые части тоже удастся выразить через компоненты  $\vec{\varphi}^{(-)}$ ,  $\vec{\psi}$  с помощью уравнений Кирхгофа (3), (4), то получается связь (8) между векторами  $\vec{\varphi}^{(-)}$ ,  $\vec{\psi}$ . Чтобы одновременно обеспечить соотношение (9), надо иметь соответствующие зависимости между компонентами  $\vec{\varphi}^{(+)}$ ,  $\vec{\varphi}^{(-)}$ ,  $\vec{\psi}$ , вытекающие исключительно из (3), (4). Итак, для записи (8) и (9) необходимо из уравнений Кирхгофа (3), (4) получить выра-



+ 1 = 2. Максимальная система линейно независимых уравнений Кирхгофа (3), (4) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} U^{(-)} - U_{L1} &= 0; \\ U^{(-)} - U_{C2} - U^{(+)} &= 0; \end{aligned} \right\} (a) \quad \left. \begin{aligned} I^{(-)} - I_{L1} - I_{C2} &= 0; \\ I_{C2} - I^{(+)} &= 0. \end{aligned} \right\} (b)$$

Уравнения колебаний (2):

$$U_{L1} = i\omega L_1 I_{L1} (c); \quad I_{C2} = i\omega C_2 U_{C2} (d).$$

Входной вектор  $\vec{\varphi}^{(-)} = (U^{(-)}, I^{(-)}) = (\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(-)})$ , выходной  $\vec{\varphi}^{(+)} = (U^{(+)}, I^{(+)}) = (\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(+)})$ , вектор внутренних состояний  $\vec{\psi} = (\sqrt{L_1} I_{L1}, \sqrt{C_2} U_{C2}) = (\xi_1, \xi_2)$ . Вычислим передаточную матрицу  $S(\omega)$  непосредственно из уравнений (a) ÷ (d). Имеем:

$$\begin{cases} U^{(+)} = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_2}\right) U^{(-)} - \frac{1}{i\omega C_2} I^{(-)}; \\ I^{(+)} = -\frac{1}{i\omega L_1} U^{(-)} + I^{(-)}. \end{cases}$$

Последняя система переписывается в матричной форме  $\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} S$ , где

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_2} & \frac{i}{\omega L_1} \\ \frac{i}{\omega C_2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (f)$$

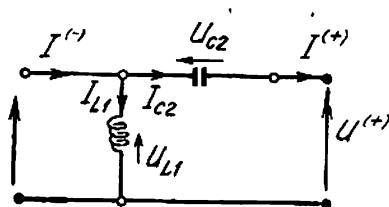


Схема 3.

Выражения (10) вытекают из (a), (b):  $U_{L1} = U^{(-)}$ ;

$$U^{(+)} = U^{(-)} - U_{C2}; \quad I_{C2} = I^{(-)} - I_{L1}; \quad I^{(+)} = I_{C2}.$$

Подставляем их в (c) и (d) и получаем в итоге (11):

$$\left. \begin{aligned} U^{(-)} &= i\omega L_1 I_{L1} \\ -I_{L1} + I^{(+)} &= i\omega C_2 U_{C2} \end{aligned} \right\}; \quad \begin{aligned} -\omega \xi_1 &= \frac{i}{\sqrt{L_1}} \varphi_1^{(-)}; \\ \frac{i}{\sqrt{L_1 C_2}} \xi_1 - \omega \xi_2 &= \frac{i}{\sqrt{C_2}} \varphi_2^{(-)}. \end{aligned}$$

В матричной записи последние два уравнения имеют вид (12), где

$$n = 2; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{L_1 C_2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{L_1}}, 0\right); \quad \vec{e}_2 = \left(0, \frac{i}{\sqrt{C_2}}\right).$$

Выберем  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; очевидно,  $J = J^*$ ,  $J^2 = I$ . Прямым вычислением можно проверить, что (7) и (9) выполняются в нашем примере. Следовательно, построенный операторный комплекс  $[T, e, J]$  принадлежит четырехполоснику  $\Phi$  (сх. 3). При этом отображение  $S(\omega)$ , определяемое соотношением (9), совпадает с  $S(\omega)$  в (f). Действительно, из (11)

$$\xi_1 = -\frac{i}{\omega \sqrt{L_1}} \varphi_1^{(-)}; \quad \xi_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1 \sqrt{C_2}} \varphi_1^{(-)} - \frac{i}{\omega \sqrt{C_2}} \varphi_2^{(-)},$$

откуда

$$\begin{aligned} (\vec{\psi}, \vec{e}_1) &= (\xi_1, \xi_2) \left(\frac{i}{\sqrt{L_1}}, 0\right)^* = -\frac{1}{L_1 \omega} \varphi_1^{(-)}; \\ (\vec{\psi}, \vec{e}_2) &= (\xi_1, \xi_2) \left(-\frac{i}{\sqrt{C_2}}\right) = -\frac{i}{\omega^2 L_1 C_2} \varphi_1^{(-)} - \frac{1}{\omega C_2} \varphi_2^{(-)}. \end{aligned}$$

Произведения  $\vec{a}_r J$  равны соответственно

$$\vec{a}_1 J = (0, 1); \quad \vec{a}_2 J = (1, 0),$$

так что (9) по компонентам имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(+)} &= \varphi_2^{(-)} - i(\vec{\psi}, \vec{e}_2) = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_1 C_2}\right) \varphi_1^{(-)} + \frac{i}{\omega C_2} \varphi_2^{(-)}; \\ \varphi_2^{(+)} &= \varphi_1^{(-)} - i(\vec{\psi}, \vec{e}_1) = \frac{i}{\omega L_1} \varphi_1^{(-)} + \varphi_2^{(-)}, \end{aligned}$$

что равносильно (f).

### § 3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОМПЛЕКСА $[T, e_i, J]$

Из предыдущего видно, что (8) и (10) существуют или не существуют одновременно для данного многополюсника  $\bar{\Phi}$ . Пусть для  $\bar{\Phi}$  найдены все выражения (10). Соотношения (10, а) в количестве  $\mu + m$  суть следствия уравнений (3). Поскольку наибольшее число линейно независимых уравнений (3) равно  $M$  (цикломатическому числу мультиграфа  $G = \bar{\Phi}$ ), то получаем оценку

$$\mu + m \leq M = |\Gamma| - |X| + 1. \quad (15)$$

Аналогично выражениям (10, б) всего  $\nu + m$ ; наибольшее количество линейно независимых уравнений (4) равно  $|X| - 1$ , откуда

$$\nu + m \leq |X| - 1. \quad (16)$$

Складывая неравенства (15) и (16) и замечая, что  $\nu = N - \mu$ , а  $N + 2m = |\Gamma|$ , имеем:  $|\Gamma| \leq |\Gamma|$ . Следовательно, в соотношениях (15) и (16) обязательны равенства:

$$\mu = M - m; \quad (17)$$

$$\nu = (X) - m - 1. \quad (18)$$

Это означает, что количества индуктивностей и емкостей однозначно определены задачей (10), если заданы топологические характеристики многополюсника (число ребер, вершин и полюсов). Заметим, что (17) и (18) зависимы — одно вытекает из другого.

Выражение для  $U_{L_j}$  (10, а) получено из уравнений Кирхгофа (3), поэтому соответствующий вектор коэффициентов  $\vec{Q}$  (после перенесения  $U_{L_j}$  в правую часть) принадлежит линейной оболочке  $H_M$  векторов  $\vec{Q}_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ), компонентами которых являются коэффициенты из уравнений (3). Вообще каждому вектору  $\vec{Q}_k$  из оболочки  $H_M$  отвечает уравнение для напряжений  $\sum_{i=1}^R b_i U_i = 0$ , где  $b_i$  суть  $i$ -ая компонента вектора  $\vec{Q}_k$  и наоборот.

На основании леммы 1 в  $G = \bar{\Phi}$  существует хотя бы один элементарный цикл  $Q_{L_j}$ , состоящий из ребер типа  $q_{ik}$ , типа  $q_{ij}^{(+)}$  (или одного из этих типов) и в точности одного ребра  $q_{L_j}$ . Такой цикл  $Q_{L_j}$  назовем стандартным для индуктивности  $q_{L_j}$ . Аналогично для каждого ребра  $q_{ij}^{(+)}$  есть стандартный цикл  $Q_{ij}$ , состоящий из данного ребра  $q_{ij}^{(+)}$  и ребер типа  $q_{ik}$ ,  $q_{ij}^{(-)}$  (либо одного из этих типов). На сх. 4 даны примеры

стандартных циклов. В замкнутом четырехполоснике  $\bar{\Phi}$  (сх. 3) стандартный цикл  $Q_{L1}$  состоит из ребер  $q_{11}, q^{(-)}$ ; стандартный цикл  $Q$  для  $q^{(-)}$  — из  $q^{(+)}, q_{c2}, q^{(-)}$ .

Предположим, что  $q_{Lj}$  имеет два различных стандартных цикла:  $Q_{Lj}$  и  $Q'_{Lj}$ . Разность вектор-циклов  $\vec{Q} = \vec{Q}_{Lj} - \vec{Q}'_{Lj}$  суть ненулевой вектор  $\vec{Q}$  из  $H_M$ , а соответствующая ребру  $q_{Lj}$  компонента этого вектора равна нулю. По лемме 1 в  $G = \bar{\Phi}$  найдется элементарный цикл  $h$  из ребер типа  $q_{ck}, q^{(-)}$ . Если  $h$  сложен одними емкостями  $q_{ck}$ , то будем называть его  $C$ -циклом, если  $h$  имеет входные ребра  $q^{(-)}$  — то  $C^{(-)}$ -циклом.

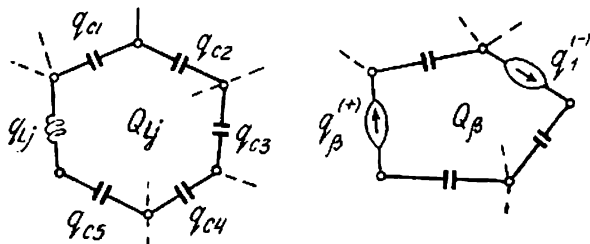


Схема 4.

Уравнение (3) вдоль цикла  $h$ , не содержащее напряжений  $U_{Lj}, U_{\beta}^{(+)}$ , можно внести в исходную систему  $M$  линейно независимых уравнений Кирхгофа, и тогда последнюю нельзя разрешить относительно  $M$  переменных  $U_{Lj}, U_{\beta}^{(+)}$ , т. е. нельзя получить (10, а). Противоречие показывает, что стандартные циклы единственны, а выражения (10, а) являются уравнениями Кирхгофа для напряжений вдоль стандартных циклов. Выделив в электрической цепи  $G = \bar{\Phi}$  систему стандартных циклов  $\{Q_{Lj}, Q_{\beta}\}$ , мы одновременно получаем (10, а).

Удаление всех ребер  $q_{Lj}, q^{(-)}$  из  $G$  размыкает все циклы, поскольку каждый оставшийся был бы  $C$ -,  $C^{(-)}$ -циклом. В силу свойств дерева [1], совокупность ребер  $q_{ck}, q^{(-)}$  суть дерево  $G^{(-)}$ , содержащее все вершины из  $G$ . Поскольку это условие  $G$  равносильно отсутствию  $C$ -,  $C^{(-)}$ -циклов при выполнении (17), то оно является необходимым и достаточным для существования (10, а).

Покажем, что с учетом соотношения (17) можно получить (10, б) тогда и только тогда, когда  $G$  не имеет  $C$ -,  $C^{(-)}$ -циклов (последний определяется как цикл, состоящий хотя бы из одного выходного ребра  $q^{(+)}$  и еще, может быть, емкостей  $q_{ck}$ ). Допустим, такой цикл  $Q_c$  есть, у него  $t$  ребер и  $t$  вершин. В смысле задачи (10, б) ток в каждом ребре на  $Q_c$  не известен. В уравнения (4) для остальных вершин мультиграфа  $G$  ни один из  $t$  отмеченных токов не входит.

В качестве максимальной линейно независимой системы уравнений Кирхгофа (4) можно взять уравнения (4) по любому множеству  $v$  вершин из  $G = (X, \Gamma)$  в количестве  $|X| - 1$ . Вершину  $x_i$ , не вошедшую в  $v$ , выберем на  $Q_c$ ; в результате мы располагаем лишь  $t - 1$  уравнением Кирхгофа для выражения токов  $I_1, \dots, I_t$  цикла  $Q_c$  через  $I_{Lj}, I_{\beta}^{(-)}$ , так что задача (10, б) не решается. С другой стороны, если  $C$ -,  $C^{(-)}$ -циклов нет, то совокупность ребер  $q_{ck}, q^{(-)}$  является деревом  $G^{(-)}$ , содержащим все вершины из  $G$  (по аналогии с  $G^{(-)}$ ). У дерева  $G^{(-)}$  найдется

вершина  $x_1$ , инцидентная только одному (висячему) ребру  $q_{ci}(q_i^{(+)})$ . Ребра, дополняющие  $G^{(+)}$  до  $G$ , несут известные токи  $I_{Lj}$ ,  $I_j^{(-)}$ , поэтому из уравнения (4) вершины  $x_1$  получается (10, б) для одного тока  $I_{ci}(I_a^{(+)})$ . Удалив из  $G^{(+)}$  указанное ребро  $q_{ci}(q_i^{(+)})$ , получим дерево  $G_1^{(+)}$ , к которому применимо предыдущее рассуждение. После повторения такой операции конечное число раз задача (10, б) будет решена. Доказана

**Лемма 2.** Необходимые и достаточные условия существования выражений (10) допускают следующие две равносильные формулировки: I. Совокупность ребер  $q_{ck}, q_k^{(-)}$  электрической цепи  $G$  образует дерево  $G^{(-)}$ , совокупность ребер  $q_{ck}, q_k^{(+)}$  — дерево  $G^{(+)}$ , причем  $G^{(-)}$  и  $G^{(+)}$  содержат все вершины из  $G$ . II. Отсутствуют  $C$ -,  $C^{(-)}$ -,  $C^{(+)}$ -циклы, а количество индуктивностей  $\mu$  связано с цикломатическим числом  $M$  мультиграфа  $G$  соотношением  $\mu = M - m$  (17), где  $m$  — число входных (выходных) ребер.

Лемма 2 дает критерий справедливости равенства (8); предполагая (8) выполненным, обратимся к (9), которое в матричной форме имеет вид (19):

$$\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} - i \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) \vec{a}_\alpha J. \quad (19)$$

Из (12), т. е. (8), находим:

$$\vec{\psi} = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^{(-)} \vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}. \quad (20)$$

Подставляем  $\vec{\psi}$  в (19):

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}^{(+)} &= \vec{\varphi}^{(-)} - i \sum_{\beta=1}^n \left( \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^{(-)} \vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta \right) \vec{a}_\beta J = \vec{\varphi}^{(-)} - \\ &- i \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n (\vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta) \varphi_\alpha^{(-)} \vec{a}_\beta J = \vec{\varphi}^{(-)} - \\ &- i \vec{\varphi}^{(-)} \| (\vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta) \| J. \end{aligned}$$

Для матрицы  $S(\omega)$  получена основная формула:

$$S(\omega) = I - \| (\vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta) \| J. \quad (21)$$

Передаточная матрица  $S(\omega)$  многополюсника  $\Phi$  совпадает, таким образом, с характеристической матрицей — функцией оператора  $T$ , изученной в [2], если операторный комплекс  $[T, e_\alpha, J]$  принадлежит  $\Phi$ . В этом случае  $S(\infty) = I$ .

Сделаем одно замечание о режиме электрической цепи  $G$  на бесконечной частоте ( $\omega = \infty$ ). Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то реактивные сопротивления индуктивности и емкости  $Z_L = \frac{U_L}{I_L} = i\omega L$ ,  $Z_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{i\omega C}$  стремятся соответственно к бесконечности и к нулю. Физически это означает, что на бесконечной частоте индуктивный двухполюсник  $q_L$  отсутствует (представляет для тока бесконечное сопротивление), а емкостной  $q_C$  пропускает ток  $I$ , как идеальный проводник, без потери энергии. В соответствии с этими нестрогими физическими замечаниями мы доопределим понятие электрической цепи  $G$  так: при частоте  $\omega = \infty$  ток  $I_L = 0$  (т. е.  $q_L$  от-



существует, «размыкается»), напряжение  $U_c = 0$  («короткое замыкание»). Уравнения Кирхгофа (3), (4) по определению сохраняются для полученной цепи  $G(\infty)$ , уравнения колебаний (2) отбрасываются.

Если имеют место выражения (10), то многополюсник  $\Phi$  — открытая система. Действительно, отображение  $R(\omega)$  дается формулой (20), а  $S(\omega)$  можно получить из выражений для  $U_{\beta}^{(+)}$ ,  $I_{\beta}^{(+)}$  в (10), правые части которых зависят лишь от  $\vec{\varphi}^{(-)}$  и  $\vec{\psi}$ .

Отсюда же вытекает, что  $R(\omega)$ ,  $S(\omega)$  — рациональные функции от  $\omega$ ; в частности, передаточная матрица  $S(\omega)$  существует для всех значений  $\omega$ , за исключением конечного числа полюсов.

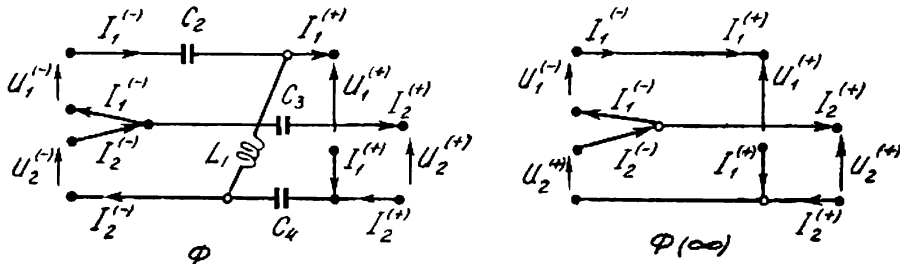


Схема 5.

Перепишав (12) в виде  $\vec{\varphi} \left( \frac{1}{\omega} T - I \right) = \frac{1}{\omega} \sum_{\alpha=1}^n \varphi_{\alpha}^{(-)} e_{\alpha}^{(-)}$ , получаем, что  $\vec{\varphi} \rightarrow 0$

при  $\omega \rightarrow \infty$ , а уравнения (10) дают возможность выразить  $U_{\beta}^{(+)}$ ,  $I_{\beta}^{(+)}$  через  $U_{\beta}^{(-)}$ ,  $I_{\beta}^{(-)}$  ( $\omega = \infty$ ). Следовательно, в предположении (10) существует  $S(\infty)$ . Однако, как показывает пример сх. 5, условие  $S(\infty) = I$  может не выполняться. Для  $\Phi(\infty)$  из уравнений Кирхгофа вытекает:  $U_1^{(+)} = U_1^{(-)} + U_2^{(-)}$ ;  $U_2^{(+)} = U_2^{(-)}$ ;  $I_2^{(+)} = I_2^{(-)} - I_1^{(-)}$ ;  $I_1^{(+)} = I_1^{(-)}$ , откуда

$$S(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

Тем не менее в нашем примере небольшим изменением конструкции входа можно обеспечить единичную передачу на частоте  $\omega = \infty$ . Положим

$$U_{0,1}^{(-)} = U_1^{(-)} + U_2^{(-)}; \quad U_{0,2}^{(-)} = U_2^{(-)}; \quad I_{0,2}^{(-)} = I_2^{(-)} - I_1^{(-)}; \quad I_{0,1}^{(-)} = I_1^{(-)}.$$

Получится многополюсник  $\Phi_0$  (сх. 6), который отличается от  $\Phi$  только входными ребрами и означает каскадное<sup>1</sup> соединение  $\Phi^{-1}(\infty)$  с  $\Phi$ , где  $\Phi^{-1}(\infty)$  — зеркальное отражение  $\Phi(\infty)$  относительно вертикальной оси с изменением направления внешних токов (сх. 6). Для  $\Phi_0$  (сх. 6) передаточная матрица

$$S_0(\omega) = S^{-1}(\infty) S(\omega) \tag{22}$$

и  $S_0(\infty) = I$ , что можно проверить и непосредственно по  $\Phi_0(\infty)$ .

<sup>1</sup> Каскадным называется такое соединение двух многополюсников, когда выход первого подается на вход второго; передаточная матрица результирующего многополюсника равна произведению исходных передаточных матриц.

В общем случае также надо провести нормировку  $S(\omega)$  множителем  $S^{-1}(\infty)$ , как в (22), что соответствует присоединению ко входу  $\Phi$  многополюсника  $\Phi_1$ , реализующего матрицу  $S^{-1}(\infty)$ . Покажем, что  $\Phi_1 = \Phi^{-1}(\infty)$ . На основании свойства передаточной матрицы реактивного многополюсника [9] имеем:

$$S(\infty) = \begin{pmatrix} A & | & 0 \\ \hline 0 & | & B \end{pmatrix}, \quad S^{-1}(\infty) = \begin{pmatrix} A^{-1} & | & 0 \\ \hline 0 & | & B^{-1} \end{pmatrix},$$

где  $A$  и  $B$  — невырожденные матрицы порядка  $m$ .

Если  $S^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} a & | & b \\ \hline c & | & d \end{pmatrix}$ , то зеркальный по отношению к  $\Phi$  многополюсник  $\Phi^{-1}$  имеет передаточную матрицу  $\begin{pmatrix} a & | & -b \\ \hline -c & | & d \end{pmatrix} \neq S^{-1}(\omega)$  за счет изменения направления внешних токов. На бесконечной частоте благо-

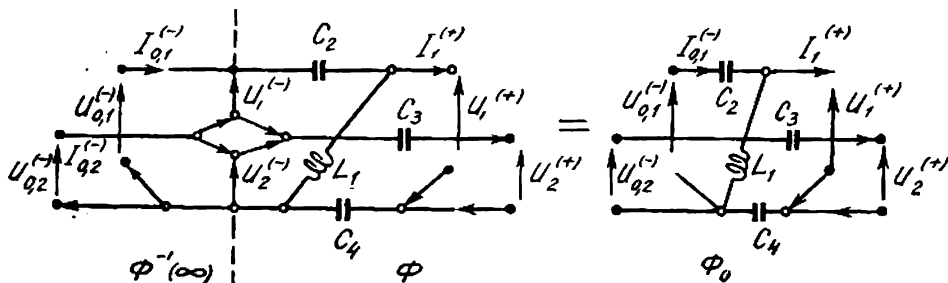


Схема 6.

даря указанной структуре  $S^{-1}(\infty)$  является передаточной матрицей для  $\Phi^{-1}(\infty)$ . Таким образом, требование  $S(\infty) = I$  в дополнение к (10) является мало существенным — в том смысле, что ему легко удовлетворить перестройкой входа  $\Phi$ . Оказывается, что этих условий уже достаточно, чтобы (13) и (14) образовали вместе с некоторой матрицей  $J$  операторный комплекс, принадлежащий  $\Phi$ . Справедлива

**Теорема 1.** Для того, чтобы многополюснику  $\Phi$  принадлежал операторный комплекс  $[T, e_\alpha, J]$ , необходимо и достаточно, чтобы а) выполнялись условия леммы 2 и б)  $\Phi$  имел единичную передачу на бесконечности:  $S(\infty) = I$ .

Необходимость доказана выше. Остается проверить, что из а) и б) вытекают (7) и (9), или в матричной записи (19) и (23):

$$\vec{\psi} \frac{T - T^*}{i} \sum_{\alpha, \beta=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) J_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta. \quad (23)$$

Из энергетических соображений, которые здесь не приводятся, выбираем матрицу  $J$  в виде

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

1. На бесконечной частоте  $U_1^{(-)} = U_2^{(+)}$  в силу  $S(\infty) = I$ ; учитывая, что стандартный цикл  $Q_2$  для ребра  $q_u^{(+)}$  дает при  $\omega = \infty$  зависимость

между выходным напряжением  $U_a^{(-)}$  и входными, заключаем следующее: стандартный цикл  $Q_\alpha$  содержит в точности два внешних ребра —  $q_\alpha^{(-)}$  и  $q_\alpha^{(+)}$ . Уравнение (3) вдоль  $Q_\alpha$  имеет вид:

$$U_a^{(+)} = U_a^{(-)} + \sum_{k=\mu+1}^N \delta_\alpha^k U_{ck}, \quad (25)$$

где направления  $q_\alpha^{(-)}$ ,  $q_\alpha^{(+)}$  совпадают с направлением обхода  $Q_\alpha$  (сх. 7);  $\delta_\alpha^k = 0$ , если  $q_{ck}$  не принадлежит  $Q_\alpha$ ;  $\delta_\alpha^k = -1$ , если  $q_{ck}$  принадлежит  $Q_\alpha$  и направления  $\vec{q}_{ck}$  и обхода  $Q_\alpha$  совпадают;  $\delta_\alpha^k = 1$ , если не совпадают. Соотношение (19) перепишем по компонентам:

$$\varphi_\alpha^{(+)} = \varphi_\alpha^{(-)} - i(\vec{\psi}, \vec{e}_{n-\alpha+1}). \quad (26)$$

При  $\alpha \leq m$   $\varphi_\alpha^{(+)} = U_\alpha^{(+)}$ ,  $\varphi_\alpha^{(-)} = U_\alpha^{(-)}$  и (26) с учетом (14) дает:

$$\begin{aligned} U_\alpha^{(+)} &= U_\alpha^{(-)} - \sum_{k=\mu+1}^N b_{n-\alpha+1}^k U_{ck} = \\ &= U_\alpha^{(-)} - \sum_{k=\mu+1}^N \hat{b}_\alpha^k U_{ck}, \end{aligned} \quad (27)$$

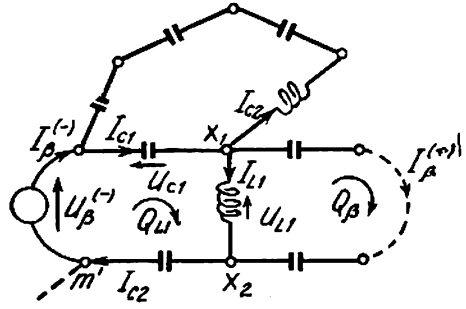


Схема 7.

где  $\hat{b}_\alpha^k$  определяется из (10, б).

Рассмотрим дерево  $G^{(+)}$  с неизвестными токами. Если  $q_{ck}$  не входит в  $Q_\alpha$  (например,  $q_{c6}$  на сх. 7), то  $\hat{b}_\alpha^k = 0$ . Действительно, по лемме 2 можно определить ток  $I_{ck}$  с помощью дерева  $G^{(-)}$  со стороны вершины  $x_1$  или со стороны  $x_2$ , двигаясь от периферии  $G^{(-)}$ , где  $x_1, x_2 \in q_{ck}$ . Хотя бы в одном из этих случаев мы не должны проходить через вершины  $m$  и  $m'$  ребра  $q_\alpha^{(-)}$ , иначе  $G$  содержит  $C$ -,  $C^{(-)}$ -циклы. Следовательно, ток  $I_\alpha^{(-)}$  не используется при нахождении  $I_{ck}$ . Когда  $q_{ck}$  входит в  $Q_\alpha$  (например,  $q_{c3}$  на сх. 7), то для обеих вершин  $x_1, x_2$  ребра  $q_{ck}$  существуют цепи  $Z_1$  и  $Z_2$ , проходящие через  $m$  и  $m'$  соответственно и принадлежащие  $G^{(+)}$ .

Сумма уравнений (4) для всех вершин цепи  $Z_1$  показывает, что в выражении (10, б) для  $I_{ck}$  коэффициент  $\hat{b}_\alpha^k = 1$  при совпадающих направлениях  $\vec{q}_{ck}$  и обхода  $Q_\alpha$ , и  $\hat{b}_\alpha^k = -1$  в противном случае. Получаем  $\hat{b}_\alpha^k = -\delta_\alpha^k$ , формулы (25) и (27) одинаковы ( $\beta = 1, \dots, m$ ). При  $m < \alpha \leq n = 2m$   $\varphi_\alpha^{(+)} = I_{n-\alpha+1}^{(+)} = I_\beta^{(+)}$ ,  $\varphi_\alpha^{(-)} = I_\beta^{(-)}$  ( $\beta = n - \alpha + 1$ ) и (26), (14) дают

$$I_\beta^{(+)} = I_\beta^{(-)} - \sum_{j=1}^n b_\beta^j I_{Lj}. \quad (28)$$

Здесь  $b_\beta^j$  взято из (10, а); считая направления дуги  $\vec{q}_{Lj}$  и обхода стандартного цикла  $Q_{Lj}$  одинаковыми, имеем:  $b_\beta^j = 0$ , если  $q_\beta^{(-)}$  не входит в  $Q_{Lj}$ ;  $b_\beta^j = 1$ , если  $q_\beta^{(-)}$  принадлежит  $Q_{Lj}$ , а направления обхода  $Q_{Lj}$  и дуги  $\vec{q}_\beta^{(-)}$  совпадают;  $b_\beta^j = -1$ , если направления противоположны (сх. 8). Для получения (28) по многополюснику  $\bar{\Phi} = G$  удобно воспользоваться

деревом  $G^{(-)}$  (см. лемму 2), выражая постепенно токи  $I_{\beta}^{(-)}$ ,  $I_{ck}$  через  $I_{\beta}^{(+)}$ ,  $I_{Lj}$ . В итоге

$$I_{\beta}^{(-)} = I_{\beta}^{(+)} + \sum_{j=1}^{\mu} \delta_{\beta}^j I_{Lj}. \quad (29)$$

Действительно,  $I_{\gamma}^{(+)}$  ( $\gamma \neq \beta$ ) не войдет в (29), ибо на бесконечной частоте соотношение (29) должно обеспечивать равенство  $I_{\beta}^{(-)} = I_{\beta}^{(+)}$ . Аналогично тому, как выше были вычислены коэффициенты  $\hat{b}_a^k$ , получаем:  $\delta_{\beta}^j = 0$ , если  $q_{\beta}^{(-)}$  не принадлежит  $Q_{Lj}$  (например,  $\delta_{\beta}^2 = 0$  на сх. 8, так как  $I_{\beta}^{(-)}$  можно определить со стороны вершины  $m'$ );  $\delta_{\beta}^j = 1$ , если  $Q_{Lj}$  содержит  $q_{\beta}^{(-)}$ , а направления обхода  $Q_{Lj}$  и дуги  $\vec{q}_{\beta}^{(-)}$  совпадают (на сх. 8  $\delta_{\beta}^1 = 1$ );  $\delta_{\beta}^j = -1$ , если они противоположны. Доказано, что  $b_{\beta}^j = \delta_{\beta}^j$ , т. е. (19) справедливо.

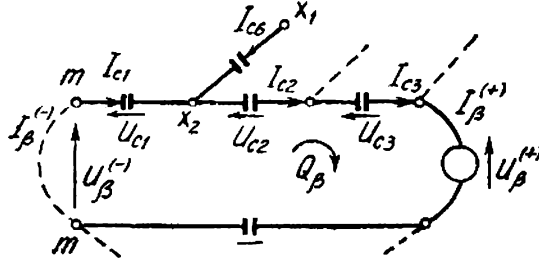


Схема 8.

2. Для элемента  $t_{kj}$  ( $k > \mu$ ,  $j < \mu$ ) матрицы  $T$  (13) имеет место правило (см. лемму 2):  $t_{kj} = 0$ , если  $q_{ck}$  не входит в стандартный цикл  $Q_{Lj}$ ;  $t_{kj} = \frac{i}{\sqrt{C_k L_j}}$ , если  $q_{ck}$  входит в  $Q_{Lj}$ , а направления  $\vec{q}_{ck}$  и  $\vec{q}_{Lj}$  одинаковы по отношению к направлению обхода  $Q_{Lj}$ ;  $t_{kj} = -\frac{i}{\sqrt{C_k L_j}}$ , если  $q_{ck}$  входит в  $Q_{Lj}$ , а направления  $\vec{q}_{ck}$  и  $\vec{q}_{Lj}$  противоположны при обходе  $Q_{Lj}$ .

Задачу выражения напряжений  $U_{Lj}$ ,  $U_{\beta}^{(-)}$  через  $U_{ck}$ ,  $U_{\beta}^{(+)}$  назовем сопряженной к задаче (10, а). Сопряженная задача, как видно из леммы 2, разрешима одновременно с (10). Каждое ребро  $q_{Lj}$  имеет сопряженный стандартный цикл  $Q_{Lj}^*$ , состоящий из ребер типа  $q_{ck}$ ,  $q_{\beta}^{(+)}$  и одного  $q_{Lj}$ . Для элемента  $t_{jk}$  ( $j \leq \mu$ ,  $k > \mu$ ) при определении тока  $I_{ck}$  с помощью дерева  $G^{(+)}$  получается правило, формулируемое в терминах сопряженной задачи так:  $t_{jk} = 0$ , если  $q_{ck}$  не входит в сопряженный стандартный цикл  $Q_{Lj}^*$ ;  $t_{jk} = -\frac{i}{\sqrt{L_j C_k}}$ , если  $q_{ck}$  входит в  $Q_{Lj}^*$ , а направления  $\vec{q}_{ck}$  и  $\vec{q}_{Lj}$  совпадают при обходе  $Q_{Lj}^*$ ;  $t_{jk} = \frac{i}{\sqrt{L_j C_k}}$ , если  $q_{ck}$  входит в  $Q_{Lj}^*$ , а направления  $\vec{q}_{ck}$  и  $\vec{q}_{Lj}$  противоположны при обходе  $Q_{Lj}^*$ .

Используя структуру матрицы  $J$  (24), перепишем (23) в виде

$$\vec{\psi} \frac{T - T^*}{i} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_{\alpha}) \vec{e}_{n-\alpha+1}. \quad (30)$$

Обозначим через  $\vec{f}$  правую часть равенства (30), которое нам предстоит доказать для многополюсника  $\Phi$ . Выпишем подробнее:

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_N) = \sum_{\alpha=1}^n \left( \sum_{j=1}^{\mu} -i I_{L_j} b_{\alpha}^j - \sum_{k=\mu+1}^N i U_{ck} b_{\alpha}^k \right) \vec{e}_{n-\alpha+1};$$

$$f_{\nu} = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{k=\mu+1}^N \frac{1}{\sqrt{L_{\nu}}} b_{\alpha}^{\nu} b_{n-\alpha+1}^k U_{ck}; & 1 \leq \nu \leq \mu \\ \sum_{\alpha=m+1}^n \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{C_{\nu}}} b_{\alpha}^{\nu} b_{n-\alpha+1}^j I_{L_j}. & \mu < \nu \leq N \end{cases} \quad (31)$$

Левую часть (30) обозначим через  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)$ . На основании (13)

$$g_j = \sum_{k=\mu+1}^N \frac{1}{i} (t_{kj} - \bar{t}_{jk}) \zeta_k = \sum_{k=\mu+1}^N i \sqrt{C_k} (\bar{t}_{jk} - t_{kj}) U_{ck}; \quad j = 1, \dots, \mu$$

$$g_k = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{i} (t_{jk} - \bar{t}_{kj}) \xi_j = \sum_{j=1}^{\mu} i \sqrt{L_j} (\bar{t}_{kj} - t_{jk}) I_{L_j}. \quad k = \mu + 1, \dots, N$$

Выше показано, что (25) и (27) совпадают, поэтому

$$U_{\alpha}^{(-)} = U_{\alpha}^{(+)} + \sum_{k=\mu+1}^N b_{n-\alpha+1}^k U_{ck}.$$

Исключаем  $U_{\alpha}^{(-)}$  из (10, а):

$$-U_{L_j} + \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j U_{\alpha}^{(+)} + \sum_{k=\mu+1}^N \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k U_{ck} + \sum_{k=\mu+1}^N a_k^j U_{ck} = 0. \quad (32)$$

Сопряженная к (10, а) задача имеет единственное решение, поэтому (32) является уравнением Кирхгофа (3) для сопряженного стандартного цикла  $Q_{L_j}^*$ . Соотношения для  $t_{jk}$  показывают, что величина  $-a_j^k = \frac{t_{jk}}{i \sqrt{L_j C_k}}$

должна совпадать с коэффициентом при  $U_{ck}$  в (32):  $\sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k + a_k^j = -a_j^k$ . Элемент  $t_{jk} = -\frac{i}{\sqrt{L_j C_k}} a_j^k$ , элемент  $t_{kj} = -\frac{i}{\sqrt{C_k L_j}} a_k^j$ , поэтому  $t_{kj} + t_{jk} = t_{kj} - \bar{t}_{jk} = t_{jk} - \bar{t}_{kj} = \frac{i}{\sqrt{C_k L_j}} \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k$ .

Теперь компоненты вектора  $g$  переписуются так:

$$g_j = \sum_{k=\mu+1}^N \frac{1}{\sqrt{L_j}} \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k U_{ck}; \quad g_k = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{C_k}} \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j b_{n-\alpha+1}^k I_{L_j}.$$

Это равносильно (31). Действительно, для  $g_k$  надо изменить индекс суммирования  $\alpha = n - \beta + 1$ :

$$g_k = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{C_k}} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta}^k b_{n-\beta+1}^j I_{L_j}.$$

Теорема доказана.

Из выражений для  $t_{ik}$ ,  $t_{kj}$  следует, что мнимая часть оператора  $T \left( \frac{T-T^*}{2i} \right)$  определяется емкостями  $q_{ck}$  на несовпадающих частях пары циклов  $Q_{Lj}$  и  $Q_{Lj}^*$ . Точнее, верна

**Теорема 2.** Самосопряженность оператора  $T$  из комплекса  $[T, e_\alpha, J]$  означает, что при каждом  $j$  ( $j = 1, \dots, \mu$ ) оба стандартных цикла из пары  $Q_{Lj}$ ,  $Q_{Lj}^*$  имеют одинаковые емкостные ребра. Иначе, для того чтобы оператор  $T$  был самосопряженным ( $T = T^*$ ), необходимо и достаточно, чтобы мультиграф

$$G_0 = \bigcup_{j=1}^{\mu} \{(Q_{Lj} \cup Q_{Lj}^*) \setminus (Q_{Lj} \cap Q_{Lj}^*)\}$$

содержал только внешние ребра многополюсника.

В конце предыдущего параграфа приведен пример операторного комплекса с несамосопряженным оператором  $T$ .

Если многополюсник  $\Phi$  удовлетворяет условиям теоремы 1, то по стандартным циклам можно без вычислений записать операторный комплекс  $[T, e_\alpha, J]$ , принадлежащий  $\Phi$ . С помощью  $[T, e_\alpha, J]$  решается ряд задач [6, 7]: находится частотная характеристика цепи  $S(\omega)$ , эквивалентная цепочка простейших многополюсников (ср. [4, 5, 8, 11]), неустановившиеся колебания многополюсника  $\Phi$  при произвольном входном сигнале  $\vec{\varphi}^{(-)}(t)$  и другие задачи.

Многополюсники, не удовлетворяющие условиям теоремы 1, также можно включить в теорию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. Успехи матем. наук, 1958, 13, 1(79), 3.
3. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем, М., АН СССР, 1951.
4. М. С. Лившиц, Э. С. Флексер. Разложение реактивного четырехполюсника в цепочку простейших четырехполюсников. ДАН СССР, 1960, 1960, 135, 3, 542.
5. М. С. Лившиц, Э. С. Флексер. Синтез передающей линии по заданным частотным характеристикам. «Зап. мех.-матем. ф-та Харьковск. ун-та и Харьковск. матем. об-ва», 1961, т. XXVIII, 4, 149—162.
6. М. С. Лившиц. О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи. Изв. АН СССР, серия матем. (1963), 27, 5, 993—1030.
7. М. С. Лившиц. Открытые системы как линейные автоматы. Изв. АН СССР, серия матем. (1963), 27, 6, 1215—1228.
8. А. Г. Руткас. О цепочечном синтезе реактивного многополюсника. «Радиотехника и электроника», 1961, 11, 1889—1945.
9. А. Г. Руткас. Передаточная матрица пассивного многополюсника. «Тр. Харьковск. горного ин-та», 1962, XI, 89—94.
10. С. Сещу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей, М., Госэнергоиздат, 1963.
11. A. Talbot. New method of synthesis of reactance networks. Proc. I E. E., 1954, 101, pt. 4, Monograph 77, p. 73.