ФЛУКТУАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФЕРРИТОВОГО ЦИЛИНДРА

И. П. Якименко

ВВЕДЕНИЕ

Исследование флуктуаций в ограниченной ферритовой среде может быть проведено на основании общей теории (Каллен и Велтон [1], Леонтович и Рытов [2], Ландау и Лифшиц [3]) с помощью известного тензора магнитной проницаемости феррита. Такое исследование представляет особый интерес для сред, размеры которых сравнимы с длиной волны, поскольку здесь несправедливы результаты классической теории теплового излучения. Теория теплового излучения ограниченных ферритовых сред (сфера малого радиуса) в последнее время развивалась рядом авторов [4, 5] в связи с исследованием шумовых характеристик ферритовых усилителей. В работе [6] рассматривалась общая теория электромагнитных флуктуаций в ограниченных гиротропных средах. Некоторые результаты этой теории применены в настоящей работе для определения флуктуационного излучения ферритового цилиндра ограниченного радиуса. В предельном случае магнитного поля, равного нулю, когда анизотропия исчезает, соотношения, полученные в работе, совпадают с результатами для мощности диэлектрического цилиндра, полученными в известной книге С. М. Рытова [2].

Существенно отметить, что в отличие от работ [6, 7], где при вычислении функции корреляции можно ограничиться отдельными несимметричными волнами с индексами n (этот индекс характеризует угловое распределение поля), при определении теплового излучения необходимо, вообще говоря, учитывать всю сумму несимметричных волн в целом. Лишь последующий анализ полученных общих выражений позволяет выяснить, какой вклад вносят отдельные колебания с индексами n. Поэтому окончательный результат работы представлен в виде ряда по всем несимметричным волнам. Эта окончательная формула допускает несложный и вместе с тем строгий расчет мощности теплового излучения ферритового цилиндра произвольных размеров.

1. Система уравнений флуктуационного поля и ее решение

Векторы флуктуационного электромагнитного поля удовлетворяют, как известно [3], уравнениям Максвелла с учетом «сторонних» электрических и магнитных индукций $\vec{K}$ и $\vec{L}$:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E})_i = ik(\mu_{ik}H_k + L_i);$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = -ik(\varepsilon\vec{E} + \vec{K}), \tag{1}$$

где $k=\frac{\omega}{c}$ — волновое число в свободном пространстве (зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$);

ε — диэлектрическая проницаемость феррита,

μ_{ik} — коэффициенты, составляющие тензор магнитной проницаемости феррита:

$$\overleftrightarrow{\mu}=\begin{vmatrix}\mu & i\varkappa & 0\\ -i\varkappa & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu_z\end{vmatrix}. \tag{2}$$

С учетом потерь величины μ_{ik} являются комплексными и могут быть представлены в виде:

$$\mu'=1+\frac{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)+2\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}\,\frac{v}{u};$$

$$\mu''=\frac{\frac{vx}{u^2}\left(1+\frac{x^2}{u^2}\right)\alpha}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2};\quad \varkappa'=\frac{\frac{vx}{u^2}\left(\frac{x^2}{u^2}-1\right)}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2};$$

$$\varkappa''=-\frac{2\frac{vx^3}{u^3}\alpha}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2};$$

$$\mu_z'\approx 1;\quad \mu_z''=\frac{v}{x}\alpha. \tag{3}$$

Для удобства вычислений в (3) введены следующие безразмерные параметры:

$$x=\frac{\omega}{c}a;\quad u=\frac{\omega_{\text{Н}}}{c}a;\quad v=\frac{\omega_m}{c}a, \tag{4}$$

где

$$\omega_{\text{Н}}=|\gamma|H_{\text{рез}};\quad \omega_m=4\pi|\gamma|M \tag{4a}$$

($H_{\text{рез}}$ — эффективное резонансное постоянное магнитное поле для данного образца; $4\pi M$ — намагниченность при насыщении; a — характерный размер системы).

Параметр $\alpha=\frac{\Delta H}{2H_{\text{рез}}}$ характеризует затухание и определяется из ширины резонансной кривой (ΔH — ширина кривой на уровне $\mu''=\frac{1}{2}\mu''_{\max}$).

Представляя поля в виде интеграла Фурье по z и ряда Фурье по φ

$$\vec{E}(z,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\vec{E}_{n\beta}e^{i(n\varphi+\beta z)}, \tag{5}$$

из системы (1) можно установить следующие уравнения для продольных компонент $E_{zn\beta}$ и $H_{zn\beta}$ (индексы n и β мы в дальнейшем писать не будем, всегда, однако, имея в виду, что рассматриваются не составляющие поля, а их Фурье-компоненты):

$$\begin{aligned}&\Delta_\perp H_z'+a_1H_z'=ibE_z+f'(\vec{K},\vec{L});\\ &\Delta_\perp E_z+a_2E_z=-ibH_z'+f''(\vec{K},\vec{L});\\ &H_z'=\sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}H_z.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь f' и f'' — линейные функционалы от $\vec{K}$ и $\vec{L}$:

$$f' = \sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}\left\{\frac{1}{\mu}(\beta^2 - k^2\varepsilon\mu)L_z - \frac{i\beta k\varkappa}{\mu}K_z + \frac{nk}{r}K_r + \right.$$

$$\left. + \frac{ik}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rK_\varphi) - \frac{i\beta}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rL_r) + \frac{n\beta}{\mu r}L_\varphi\right\}; \qquad (7)$$

$$f'' = \frac{1}{\varepsilon}\left(\beta^2 - k^2\varepsilon\frac{\mu^2 - \varkappa^2}{\mu}\right)K_z - \frac{i\beta}{\varepsilon r}\frac{\partial}{\partial r}(rK_r) + \frac{n\beta}{\varepsilon r}K_\varphi + \frac{i\beta k\varkappa}{\mu}L_z -$$

$$- \frac{nk}{r}L_r - \frac{ik}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rL_\varphi) + \frac{k\varkappa}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rL_r) + \frac{inkx}{\mu r}L_\varphi,$$

а коэффициенты a_i и b равны

$$a_1 = \frac{\mu_z}{\mu}(k^2\varepsilon\mu - \beta^2); \quad a_2 = k^2\varepsilon\frac{\mu^2 - \varkappa^2}{\mu} - \beta^2; \quad b = -\frac{\beta k\varkappa\sqrt{\varepsilon\mu_z}}{\mu}. \qquad (8)$$

Вводя линейную комбинацию

$$\Psi' = E_z + i\Lambda H_z', \qquad (9)$$

получим из (6) следующие уравнения для Ψ':

$$\Delta_\perp \Psi'_{1,2} + \gamma^2_{1,2}\Psi'_{1,2} = F_{1,2}, \qquad (10)$$

где

$$\gamma^2_{1,2} = a_1 - b\Lambda_{2,1} = a_2 + b\Lambda_{1,2}; \quad F_{1,2} = f'' + i\Lambda_{1,2}f',$$

причем $\Lambda_{1,2}$ являются корнями уравнения

$$\Lambda^2 - \frac{a_1 - a_2}{b}\Lambda - 1 = 0. \qquad (11)$$

Решения уравнений (10) находятся с помощью функции Грина для рассматриваемой задачи

$$\Psi_{1,2} = A_{1,2}J_n(\gamma_{1,2}r) + \Phi_{1,2}, \qquad (12)$$

где

$$\Phi_{1,2}(a) = \mp\frac{\pi}{2}\frac{k\Lambda_{2,1}}{\gamma^2_{1,2}(\Lambda_2 - \Lambda_1)}H_n^{(1)}(\gamma_{1,2}a)\int_0^a drr\{f_{1,2}\};$$

$$f_{1,2} = -\gamma^2_{1,2}J_{n1,2}K_z + i\beta J'_{n1,2}K_r + \frac{ink}{r}\Lambda_{1,2}\sqrt{\varepsilon\mu_z}J_{n1,2}K_r +$$

$$+ \frac{n\beta}{r}J_{n1,2}K_\varphi + k\Lambda_{1,2}\sqrt{\varepsilon\mu_z}J'_{n1,2}K_\varphi - i\gamma^2_{1,2}\Lambda_{1,2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_z}}J_{n1,2}L_z -$$

$$- \frac{nk\varepsilon}{r}J_{n1,2}L_r + ik\varepsilon J'_{n1,2}L_\varphi - k\varepsilon b_{1,2}J'_{n1,2}L_r + k\varepsilon b_{1,2}\frac{in}{r}J_{n1,2}L_\varphi; \qquad (13)$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\beta\Lambda_{1,2}}{k\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_z}}} + \varkappa\right); \qquad (14)$$

$J_{n1,2} = J_n(\gamma_{1,2}r)$; $A_{1,2}$ — постоянные.

Ψ_i в (12) линейно связано с Ψ_i':

$$\Psi_i' = \frac{\Lambda_i\gamma_i^2}{ik\varepsilon}(\Lambda_2 - \Lambda_1)\Psi_i. \qquad (15)$$

Из (9) следует, что

$$E_z = \frac{i\gamma_1^2}{k\varepsilon}\Psi_1 + \frac{i\gamma_2^2}{k\varepsilon}\Psi_2;$$

$$H_z = \frac{\Lambda_1\gamma_1^2}{k\sqrt{\varepsilon\mu_z}}\Psi_1 + \frac{\Lambda_2\gamma_2^2}{k\sqrt{\varepsilon\mu_z}}\Psi_2. \qquad (16)$$

Пользуясь системой уравнений (1), все остальные компоненты также можно выразить через функции Ψ_i:

$$
\begin{aligned}
E_z &= -i\Lambda_1\sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - i\Lambda_2\sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}\frac{\partial\Psi_2}{\partial r} - \frac{i\beta}{k\varepsilon}\frac{n\Psi_1}{r} - \frac{i\beta}{k\varepsilon}\frac{n\Psi_2}{r} - \\
&- \frac{i\beta k^3\varepsilon\varkappa}{\delta}L_\varphi - \frac{i\beta^2k^2\varkappa}{\delta}K_r - \frac{\beta k(\beta^2-k^2\varepsilon\mu)}{\delta}L_r + \frac{k^2[\beta^2\mu + k^2\varepsilon(\varkappa^2-\mu^2)]}{\delta}K_\varphi; \\
E_r &= -\frac{\beta}{k\varepsilon}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - \frac{\beta}{k\varepsilon}\frac{\partial\Psi_2}{\partial r} - \sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}\Lambda_1\frac{n\Psi_1}{r} - \sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}\Lambda_2\frac{n\Psi_2}{r} + \frac{i\beta^2k^2\varkappa}{\delta}K_\varphi - \\
&- \frac{i\beta k^3\varepsilon\varkappa}{\delta}L_r + \frac{\beta k(\beta^2-k^2\varepsilon\mu)}{\delta}L_\varphi + \frac{k^2[\beta^2\mu + k^2\varepsilon(\varkappa^2-\mu^2)]}{\delta}K_r; \qquad (17) \\
H_\varphi &= -\frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial r} - b_1\frac{n\Psi_1}{r} - b_2\frac{n\Psi_2}{r} + \frac{\beta k(\beta^2-k^2\varepsilon\mu)}{\delta}K_r + \frac{i\beta k^3\varepsilon\varkappa}{\delta}K_\varphi - \\
&- \frac{ik^4\varepsilon^2\varkappa}{\delta}L_r + \frac{k^2\varepsilon(\beta^2-k^2\varepsilon\mu)}{\delta}L_\varphi; \\
H_r &= ib_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial r} + ib_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial r} + \frac{in}{r}\Psi_1 + \frac{in}{r}\Psi_2 - \frac{\beta k(\beta^2-k^2\varepsilon\mu)}{\delta}K_\varphi + \\
&+ \frac{i\beta k^3\varepsilon\varkappa}{\delta}K_r + \frac{k^2\varepsilon(\beta^2-k^2\varepsilon\mu)}{\delta}L_r - \frac{ik^4\varepsilon^2\varkappa}{\delta}L_\varphi.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$\delta = \frac{\mu}{\mu_z}\gamma_1^2\gamma_2^2.$$

Заметим, что при $\vec{K} = \vec{L} = 0$ (17) преобразуется в известные выражения для полей в ферритовой среде.

2. Мощность флуктуационного излучения

Поля в области, не занятой ферритом ($r > a$), являются решениями волнового уравнения для свободного пространства

$$
\begin{aligned}
E_z &= B_1H_n^{(1)}(\gamma r); \\
E_\varphi &= -\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{n\beta}{r}B_1H_n^{(1)}(\gamma r) + ikB_2H_n^{(1)\prime}(\gamma r)\right\}; \\
H_z &= B_2H_n^{(1)}(\gamma r); \qquad (18) \\
H_\varphi &= -\frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{n\beta}{r}B_2H_n^{(1)}(\gamma r) - ikB_1H_n^{(1)\prime}(\gamma r)\right\} \quad \gamma^2 = k^2 - \beta^2
\end{aligned}
$$

и позволяют представить поток мощности теплового излучения в радиальном направлении с единицы длины цилиндра в следующем виде:

$$P_\omega = \frac{2ck}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-k}^{k}d\beta\,(\overline{|B_1|^2} + \overline{|B_2|^2})\cdot\frac{1}{\gamma^2}. \qquad (19)$$

Как показано в [2], область интегрирования по β сведена здесь к интервалу ($-k$, $+k$) из-за наличия в подынтегральном выражении множителя $H'H^* - H'^*H$.

Черта сверху в последнем выражении означает усреднение по равновесному распределению состояний.

3. Усреднение

Для того, чтобы получить среднее значение мощности флуктуационного излучения в соответствии с (19), необходимо коэффициенты B_i представить в виде линейных функционалов от $\vec{K}$ и $\vec{L}$, пользуясь граничными условиями на поверхности $r = a$. Применяя обычные граничные условия на поверхности раздела феррит — вакуум, состоящие в равенстве тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, получим

$$B_i = \frac{\delta_{ik}\varphi_k}{\Delta}, \tag{20}$$

где индексы i и k принимают значения 1 и 2, а

$$\delta_{11,2} = \frac{i}{J_{1,2}H}\left\{-\frac{\Lambda_{2,1}\mu_z\gamma^2}{\gamma_1\gamma_2}\frac{J'_{2,1}}{J_{2,1}} - \frac{n\beta}{ka}\sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\gamma^2}{\gamma_1\gamma_2} - \frac{\gamma_{2,1}}{\gamma_{1,2}}\right) + \frac{i\Lambda_{2,1}\gamma_{2,1}}{\gamma_{1,2}}\frac{H'}{H}\right\};$$
$$\delta_{21,2} = \frac{1}{J_{1,2}H}\left\{\frac{\gamma^2\sqrt{\varepsilon\mu_z}}{\gamma_1\gamma_2}\frac{J'_{2,1}}{J_{2,1}} + \frac{n\sqrt{\varepsilon\mu_z}b_{2,1}\gamma^2}{\gamma_1\gamma_2 a} -\right.$$
$$\left.-\frac{n\beta\gamma_{2,1}\Lambda_{2,1}}{ka\gamma_{1,2}} - \frac{\gamma_{2,1}}{\gamma_{1,2}}\sqrt{\frac{\mu_z}{\varepsilon}}\frac{H'}{H}\right\};$$
$$\Delta = -\frac{\varepsilon\mu_z\gamma^2}{\gamma_1\gamma_2}\frac{J'_1J'_2}{J_1J_2}(\Lambda_2 - \Lambda_1) - \frac{H'}{H}\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(\Lambda_1\mu_z - \Lambda_2\varepsilon)\frac{J'_1}{J_1} -\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\Lambda_2\mu_z - \Lambda_1\varepsilon)\frac{J'_2}{J_2}\right] - \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma^2}\frac{H'^2}{H^2}(\Lambda_2 - \Lambda_1) +$$
$$+\frac{n\sqrt{\varepsilon\mu_z}\,[\gamma_2^2(\beta^2 + k^2) - \gamma^2(\beta^2 + k^2\varepsilon\mu_z)]}{\beta ka\gamma_1\gamma_2}\frac{J'_1}{J_1} -$$
$$-\frac{n\sqrt{\varepsilon\mu_z}\,[\gamma_1^2(\beta^2 + k^2) - \gamma^2(\beta^2 + k^2\varepsilon\mu_z)]}{\beta ka\gamma_1\gamma_2}\frac{J'_2}{J_2} +$$
$$+\frac{n^2\beta^2k^2\,[(1 - \varepsilon\mu)^2 - \varepsilon^2\varkappa^2]\mu_z(H/\gamma^2aH') + n\varkappa\mu_z(\beta^2 + k^2\varepsilon^2)}{\mu\gamma_1\gamma_2 a}\frac{H'}{H}(\Lambda_2 - \Lambda_1); \tag{21}$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{i}{a}\int_0^a drr\,\{f_{1,2}\};\quad J_{1,2} = J_n(\gamma_{1,2}a),\ \ H = H_n^{(1)}(\gamma a).$$

Отметим, что равенство

$$\Delta = 0 \tag{22}$$

представляет собой дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в ферритовом волноводе при наличии внешнего продольного магнитного поля.

Как видно из (20) и (21), B_i являются линейными функционалами от $\vec{K}$ и $\vec{L}$. Тогда квадратичные формы, входящие в выражение (19) для потока мощности, могут быть усреднены с помощью известных корреляционных функций для «сторонних» индукций $\vec{K}$ и $\vec{L}$:

$$\langle K^{(1)}_{i\omega\beta}K^{*(2)}_{k\omega\beta}\rangle = \frac{\hbar\varepsilon''}{2\pi^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\delta_{ik}\frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1}; \tag{23}$$
$$\langle L^{(1)}_{i\omega\beta}L^{*(2)}_{k\omega\beta}\rangle = \frac{i\hbar}{4\pi^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}(\mu^*_{ki} - \mu_{ik})\frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1}.$$

После усреднения и интегрирования (одно интегрирование по r выполняется сразу из-за наличия δ-функции, а второе производится с помощью известных свойств функций Бесселя) получается следующий окончательный результат для мощности теплового излучения на частоте ω

с единицы поверхности ферритового цилиндра, находящегося во внешнем продольном магнитном поле (в классическом случае $\hbar\omega \ll T$):

$$P_\omega = \frac{T}{\pi^4 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} \frac{d\beta}{\gamma^2 |\Delta|^2} (-1)^{i+k} f_{ik} \delta_{li} \delta_{lk}^*, \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered} f_{ik} = \gamma_i^2 \gamma_k^{*2} \left(\varepsilon'' + \mu_z'' \Lambda_i \Lambda_k^* \left|\frac{\varepsilon}{\mu_z}\right|\right) I_1^{ik} + \\ + \{\varepsilon'' (\beta^2 + k^2 \Lambda_i \Lambda_k^* |\varepsilon\mu_z|) + k^2 |\varepsilon|^2 [\mu'' (1 + b_i b_k^*) - \\ - \varkappa'' (b_i + b_k^*)]\} I_2^{ik} + nk^2 |\varepsilon|^2 \left\{\frac{\beta\varepsilon'' [\Lambda_i \sqrt{\varepsilon\mu_z} + \Lambda_k^* \sqrt{\varepsilon^* \mu_z^*}]}{k |\varepsilon|^2} + \right. \\ \left. + \mu'' (b_i + b_k^*) - \varkappa'' (1 + b_i b_k^*)\right\} I_3^{ik}; \\ I_1^{ik} = \frac{J_{ni} J_{nk}^{*\prime} - J_{ni}' J_{nk}^*}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a; \quad I_2^{ik} = \frac{\gamma_i^2 J_{ni} J_{nk}^{*\prime} - \gamma_k^{*2} J_{nk}^* J_{ni}'}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a. \end{gathered} \tag{25}$$

Все индексы в формулах (24) и (25) принимают значения 1 и 2.

Соотношение (24) представляет собой точную формулу для расчета мощности флуктуационного излучения, включающую как магнитную, так и диэлектрическую часть, связанную с наличием мнимой части диэлектрической проницаемости. Эта последняя часть может иметь существенное значение в областях частот, не слишком близких к частоте гиромагнитного резонанса.

Как видно из (24), флуктуационное излучение состоит из бесконечной суммы колебаний с индексами n.

Отметим также, что полная мощность излучения пропорциональна температуре цилиндра. Отсюда следует, что эффективным методом борьбы с шумами ферритовых элементов является не только снижение уровня их потерь, но также их охлаждение.

4. Переход к диэлектрическому цилиндру

Полагая $\mu_z = \mu$, $\mu'' = \varkappa = 0$, найдем $\Lambda_{1,2} = \mp 1$; $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = k^2\varepsilon\mu - \beta^2 = \lambda^2$; $b_{1,2} = \mp \frac{\beta}{k\sqrt{\varepsilon\mu}}$; $\gamma^2 = \lambda_0^2$.

Тогда

$$\begin{gathered} f_{ik} = \varepsilon'' \{ |\lambda|^4 I_1 + (\beta^2 + k^2\mu) |\varepsilon| \Lambda_1 \Lambda_k^*) I_2 + n\beta k \sqrt{\mu} (\Lambda_i \sqrt{\varepsilon} + \\ + \Lambda_k^* \sqrt{\varepsilon^*}) I_3 \}; \\ I_1 = \frac{J_n J_n'^* - J_n' J_n^*}{\lambda^2 - \lambda^{*2}} a; \quad I_2 = \frac{\lambda^2 J_n J_n'^* - \lambda^{*2} J_n^* J_n'}{\lambda^2 - \lambda^{*2}} a; \\ I_3 = J_n J_n^*; \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \delta_{11,2} = \frac{i}{J^2 H^2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \delta \pm \Delta_1\right); \quad \delta_{21,2} = \frac{1}{J^2 H^2} \left(\mp \delta - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Delta_2\right); \\ \Delta = -\frac{2\lambda^2 (\Delta_1 \Delta_2 - \delta^2)}{\lambda_0^2 J^2 H^2}; \quad \Delta_1 = H'J - \frac{\mu\lambda_0^2}{\lambda^2} HJ'; \\ \Delta_2 = H'J - \frac{\varepsilon\lambda_0^2}{\lambda^2} HJ'; \quad \delta = \frac{\beta n}{ka} \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right) HJ. \end{gathered} \tag{27}$$

Последние обозначения введены в книге С. М. Рытова [2].

Выражение (26) позволяет вычислить сумму

$$(-1)^{i+k} f_{ik} \delta_{li} \delta_{lk}^{*} = \frac{4}{|J|^4 H^4} \{(|\delta|^2 + |\Delta_1|^2)(|\lambda|^4 I_1 + \beta^2 I_2) + \\ + k^2 \mu^2 (|\delta|^2 + |\Delta_2|^2) I_2 - \beta n k \mu [\delta (\Delta_1^* + \Delta_2^*) + \delta^* (\Delta_1 + \Delta_2)] I_3\}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (24), для потока мощности с единицы поверхности диэлектрического цилиндра находим окончательно

$$P_\omega = \frac{\varepsilon'' T}{\pi^4 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} d\beta \frac{\lambda_0^2}{|\lambda|^4 |\Delta_1 \Delta_2 - \delta^2|^2} \{k^2 \mu^2 (|\delta|^2 + |\Delta_2|^2) I_2 + \\ + (|\delta|^2 + |\Delta_1|^2)(|\lambda|^4 I_1 + \beta^2 I_2) - n\beta k \mu [\delta (\Delta_1^* + \Delta_2^*) + \delta^* (\Delta_1 + \Delta_2) I_3\}. \quad (29)$$

Формула (29) в точности совпадает с известным результатом С. М. Рытова [2].

5. Тонкий цилиндр

Из различных частных случаев полученного общего результата наибольший интерес представляет случай тонкого цилиндра ($a \ll \lambda$), когда условия геометрической оптики не выполняются и, следовательно, классическая теория теплового излучения не может быть применена. Поскольку при малых радиусах цилиндра

$$\gamma_i a \ll 1, \quad (30)$$

здесь можно воспользоваться приближенными значениями функций Бесселя при малых аргументах:

$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n; \; J_0'(\gamma_i a) = -\frac{\gamma_i^2 a}{2}; \; J_n'(\gamma_i a) = \frac{1}{(n-1)! a}\left(\frac{\gamma_i a}{2}\right)^n;$$
$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{x}{2}; \; H_n^{(1)}(x) = -\frac{i(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n; \quad (31)$$
$$H_0^{(1)'}(\gamma a) = \frac{2i}{\pi a}; \; H_n^{(1)'}(\gamma a) = \frac{in!}{\pi a}\left(\frac{2}{\gamma a}\right)^n.$$

Подставляя (31) в (24), нетрудно убедиться, что мощность колебаний с $n = 0$ пропорциональна a (с единицы поверхности цилиндра), а мощность колебаний с $n \gg 1$ пропорциональна $a^{2|n|-1}$. Отсюда следует, что при малых a основной вклад дают только колебания с $n = 0$ и $n = 1$.

При $n = 0$ из (24) при (31) получим

$$P_{\omega_0} = \frac{Tk^3 a(\varepsilon'' + \mu_z'')}{6\pi^2} \quad (32)$$

и при $n = 1$

$$P_{\omega_1} = \frac{2Tk^3 a}{3\pi^2}\left\{\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon + 1|^2} + \frac{\mu'' - \varkappa''}{|1 + \mu - \varkappa|^2}\right\}. \quad (33)$$

Заметим, что при $\mu_z'' = 0$ (32) совпадает с полученной в [2] формулой для свободного диэлектрического цилиндра. Однако из сравнения (32) и (33) видно, что для тонкого диэлектрического цилиндра существенен также учет колебания $n = 1$, если только $|\varepsilon + 1|$ не слишком велико.

Поскольку резонансным образом от магнитного поля зависят только величины μ и $\varkappa$, то мощность P_{ω_1} резко изменяется в зависимости от магнитного поля. При определенных условиях вклад этого колебания является основным. Это, очевидно, наблюдается, если

$$\mathrm{Re}(1 + \mu - \varkappa) = 0. \quad (34)$$

Это условие, как видно из (3), выполняется при

$$x = u + \frac{1}{2} v. \tag{35}$$

Но тогда

$$\frac{\mu'' - \varkappa''}{|1 + \mu - \varkappa|^2} = \frac{1}{\mu'' - \varkappa''} = \frac{1}{4} \frac{v}{x\alpha}. \tag{36}$$

Следовательно,

$$P_{\omega_1} \approx \frac{Tk^3 a}{6\pi^2} \frac{v}{x\alpha}. \tag{37}$$

Полагая $\frac{v}{x} = 1$, $\alpha = 10^{-3}$, получим

$$P_{\omega_1} \approx 10^3 \frac{Tk^3 a}{6\pi^2}. \tag{38}$$

На волне 25 *см* и при $a = 0{,}25$ *см* для цилиндра длиной 20 *см* получаем $P_{\omega_1} \approx 10^{-14}$ *вт/мггц*. В других случаях тонкий ферритовый цилиндр будет излучать мощность, на несколько порядков меньшую.

6. О численном расчете

В общем случае для точных вычислений необходимо пользоваться соотношением (24). Интеграл по β, входящий в это выражение, может быть вычислен одним из простых численных методов, например, по формуле Симпсона. При этом могут быть полезны следующие свойства подынтегральной функции $F(\beta)$:

1. $F(+\beta) = F(-\beta)$, т. е. подынтегральная функция является четной функцией;

2. $F(\pm k) = 0$;

3. $$F(0) = \frac{|\Delta_1|^2}{|\Delta|^2}\left[\mu_z'' |\gamma_1|^4 \left|\frac{\varepsilon}{\mu_z}\right| I_1^{11} + \varepsilon'' k^2 |\varepsilon\mu_z| I_2^{11}\right] + \frac{|\Delta_2|^2}{|\Delta|^2}\left\{\varepsilon'' |\gamma_2|^4 I_1^{22} + k^2 |\varepsilon|^2 \left[\mu''\left(1 + \left|\frac{\varkappa}{\mu}\right|^2\right) - 2\varkappa'' \operatorname{Re}\frac{\varkappa}{\mu}\right] I_2^{22} - nk^2 |\varepsilon|^2 \left[\varkappa''\left(1 + \left|\frac{\varkappa}{\mu}\right|^2\right) - 2\mu'' \operatorname{Re}\frac{\varkappa}{\mu}\right] I_3^{22}\right\}, \tag{39}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{1}{J_1 H}\left\{\frac{\gamma\sqrt{\varepsilon\mu_z}}{\gamma_1}\left(\frac{n}{\gamma_2 a} - \frac{J_{n+1,2}}{J_{n2}}\right) + \frac{n\gamma\sqrt{\varepsilon\mu_z}\,\varkappa}{\mu\gamma_1\gamma_2 a} - \frac{\gamma_2\sqrt{\mu_z}}{\gamma_1\sqrt{\varepsilon}} \times \left(\frac{n}{\gamma a} - \frac{H_{n+1}}{H_n}\right)\right\};$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\gamma_2 J_2 H}\left\{\gamma_1\left(\frac{n}{\gamma a} - \frac{H_{n+1}}{H_n}\right) - \gamma\mu_z\left(\frac{n}{\gamma_1 a} - \frac{J_{n+1,1}}{J_{n1}}\right)\right\}; \tag{40}$$

$$\Delta = -\frac{\varepsilon\mu_z\gamma^2}{\gamma_1\gamma_2}\frac{J_1' J_2'}{J_1 J_2} - \frac{H'}{H}\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\mu_z\frac{J_1'}{J_1} + \frac{\gamma_1\varepsilon}{\gamma_2}\frac{J_2'}{J_2}\right] - \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma^2}\frac{H'^2}{H^2} - \frac{nk^2\varepsilon\mu_z\varkappa}{\mu\gamma_1\gamma_2 a}\frac{J_1'}{J_1} + \frac{nk^2\varepsilon^2\varkappa\mu_z}{\mu\gamma_1\gamma_2 a}\frac{H'}{H}; \quad \gamma_1 = k\sqrt{\varepsilon\mu_z};$$

$$\gamma_2 = k\sqrt{\varepsilon\frac{\mu^2 - \varkappa^2}{\mu}}; \quad \gamma = k.$$

Таким образом, пользуясь формулой Симпсона, достаточно вычислить подынтегральную функцию по точной формуле лишь в точке $\beta = \frac{k}{2}$, а при $\beta = 0$ и $\beta = \pm k$ воспользоваться свойствами (39).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты настоящей работы показывают, что для расчета мощности флуктуационного излучения ферритового цилиндра, находящегося в продольном магнитном поле, могут быть предложены простые и точные формулы типа (24). Аналогичным образом решаются и задачи по определению мощности тепловых шумов в различных волноводных системах, содержащих ферритовые стержни. Решение таких задач существенно для применений волноводных элементов в различных малошумящих устройствах, с одной стороны, и для строгого анализа работы шумовых генераторов, с другой стороны.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. B. Callen, T. A. Welton. Phys. Rev., 83, 34, 1951.
2. М. А. Леонтович, С. М. Рытов. ЖЭТФ, 23, 246, 1952; С. М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, М., Изд-во АН СССР, 1953.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, М.—Л., Гостехиздат, 1959.
4. Я. А. Моносов. «Радиотехника и электроника», 7, 1738, 1962.
5. Л. А. Шишкин, М. А. Савченко. ИВУЗ, «Радиотехника», 5, 4, 1962.
6. И. П. Якименко. Всесоюзн. научн. сессия, посв. Дню радио, М., изд-во «Сов. радио», 1962.
7. И. П. Якименко. ИВУЗ, «Радиофизика», 7, 375, 1964.