

## ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА СТРУКТУРУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. И. Терещенко, В. М. Бондаренко

В технике СВЧ используются системы, состоящие из проводящих поверхностей различной конфигурации. В ряде случаев в систему вводятся дополнительные элементы, вызывающие малые возмущения поля. Для более обоснованного подхода к расчету и конструированию таких систем необходимо знать невозмущенные поля, в связи с чем требуется выяснить влияние изменения формы граничных поверхностей на структуру поля. В данной работе исследуется зависимость поперечной (по отношению к направлению распространения) структуры поля от кривизны идеально проводящей граничной поверхности.

Рассмотрим две параллельные идеально проводящие плоскости, между которыми вдоль оси  $z$  распространяются  $E_n$ - или  $H_n$ -волны (индекс  $n$  обозначает число вариаций поля между плоскостями вдоль оси  $y$ ).

Для упрощения анализа положим  $n = 1$ . В таком случае распределение поля между плоскостями записывается следующим образом:  
для  $E_1$ -волны

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{a}_y \frac{k_2}{k} \cos(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k_1}{k} \sin(k_1 y) \sin(k_2 z - \omega t) \\ \vec{H} &= -\vec{a}_x \cos(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для  $H_1$ -волны

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{a}_x \sin(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t) \\ \vec{H} &= -\vec{a}_y \frac{k_2}{k} \sin(k_1 y) \cos(k_2 z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k_1}{k} \cos(k_1 y) \sin(k_2 z - \omega t). \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$ ,  $\vec{a}_z$  — орты соответствующих осей;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ( $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве);

$k_1 = \frac{\pi}{d}$ ;  $d$  — расстояние между плоскостями;

$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$  ( $\lambda_2$  — длина волны в системе).

Как следует из выражений (1), изменение всех составляющих поля вдоль координаты  $y$  происходит по синусоидальному закону (рис. 1, а и 1, б).

Так как систему двух параллельных плоскостей можно рассматривать как часть коаксиального волновода бесконечно большого радиуса, то, учитывая преобразование координат ( $z = z$ ,  $y \rightarrow r$ ,  $x \rightarrow -\varphi$ ), выражение (1) можно переписать в виде:  
для  $E_{01}$ -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{a}_r \frac{k_z}{k} \cos(k'_{01} r) \cos(k_2 z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k'_{01}}{k} \sin(k'_{01} r) \sin(k_2 z - \omega t); \\ \vec{H} &= \vec{a}_\varphi \cos(k'_{01} r) \cos(k_2 z - \omega t);\end{aligned}$$

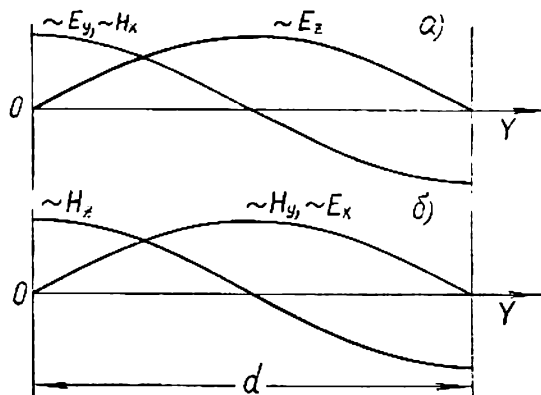


Рис. 1.

а)  $E_1$ -волна; б)  $H_1$ -волна

для  $H_{01}$ -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{a}_\varphi \sin(k'_{01} r) \cos(k_2 z - \omega t); \\ \vec{H} &= -\vec{a}_r \frac{k_z}{k} \sin(k'_{01} r) \cos(k_2 z - \omega t) + \\ &+ \vec{a}_z \frac{k'_{01}}{k} \cos(k'_{01} r) \sin(k_2 z - \omega t),\end{aligned}$$

где  $k'_{01}$  — поперечное волновое число для симметричной волны ( $m = 0$ ,  $n = 1$ ), взятое для системы с бесконечно большим радиусом и численно равное  $k_1$ .

При  $m \neq 0$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) коаксиал бесконечно большого радиуса дает:

для  $E_{m1}$ -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left[ \vec{a}_r \frac{k_z}{k} \cos(k'_{m1} r) \cos(k_2 z - \omega t) + \right. \\ &+ \left. \vec{a}_z \frac{k'_{m1}}{k} \sin(k'_{m1} r) \sin(k_2 z - \omega t) \right] \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}; \\ \vec{H} &= \vec{a}_\varphi \cos(k'_{m1} r) \cos(k_2 z - \omega t) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix};\end{aligned}$$

для  $H_{m1}$ -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{a}_\varphi \sin(k'_{m1}r) \cos(k_z z - \omega t) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \\ \vec{H} &= \left[ -\vec{a}_r \frac{k_z}{k} \sin(k_{m1}r) \cos(k_z z - \omega t) + \right. \\ &\left. + \vec{a}_z \frac{k'_{m1}}{k} \cos(k_{m1}r) \sin(k_z z - \omega t) \right] \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix},\end{aligned}$$

где  $k'_{m1}$  — поперечное волновое число,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Для определения влияния кривизны граничных поверхностей на структуру электромагнитного поля будем плавно деформировать систему, уменьшая радиус коаксиального волновода. При этом расстояние  $d$  между цилиндрическими поверхностями, образующими волновод, выбирается из условия

$$d = b - a = \frac{\alpha_{mn} - \alpha_m (n-1)}{k_{mn}}, \quad (2)$$

где  $\alpha_{mn}$  и  $\alpha_m (n-1)$  — последовательные корни уравнения

$$\begin{aligned}J'_m(k_{mn}r) &= 0 \text{ или } f'_m(k_{mn}r) = 0, \\ f_m(k_{mn}r) &= A J_m(k_{mn}r) + N_m(k_{mn}r),\end{aligned} \quad (3)$$

$f'_m(k_{mn}r)$  — производная от (3) по аргументу;

$A$  — коэффициент, меняющийся в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ ,  $J_m(k_{mn}r)$  и  $N_m(k_{mn}r)$  — функции Бесселя и Неймана  $m$ -ого порядка;

$a$  и  $b$  — внутренний и внешний радиусы коаксиального волновода соответственно;

$k_{mn} = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  — поперечное волновое число.

Теперь задача сводится к нахождению радиальной зависимости структуры поля от вида функции (3).

Эта функция была построена в пределах  $0 \leq k_{mn}r \leq 15$  при  $-\infty \leq A \leq \infty$  для  $m = 0$  и  $m = 1$ . Кроме того, были построены функции  $\frac{1}{k_{mn}r} f_m(k_{mn}r)$  и  $f'_m(k_{mn}r)$  и найдены аргументы нулей и экстремумов этих функций.

На основании результатов этих вычислений можно по формулам для  $E_{m1}$ -волны

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{k_z}{k} \left[ \vec{a}_r k_{m1} f'_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} + \right. \\ &+ \vec{a}_\varphi \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \left. \right] \cos(k_z z - \omega t) - \\ &- \vec{a}_z \frac{1}{k} (k_{m1})^2 f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \sin(k_z z - \omega t); \\ \vec{H} &= \left[ \vec{a}_r \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} - \right. \\ &\left. - \vec{a}_\varphi k_{m1} f'_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \right] \cos(k_z z - \omega t); \end{aligned}$$

для  $H_{m1}$ -волны

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left[ \vec{a}_r \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \vec{a}_z k_{m1} f'_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \right] \cos(k_z z - \omega t); \\ \vec{H} &= \frac{k_z}{k} \left[ \vec{a}_r k_{m1} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \vec{a}_\varphi \frac{m}{r} f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \right] \cos(k_z z - \omega t) + \\ &\quad + \vec{a}_z \frac{1}{k} (k_{m1})^2 f_m(k_{m1}r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \sin(k_z z - \omega t) \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

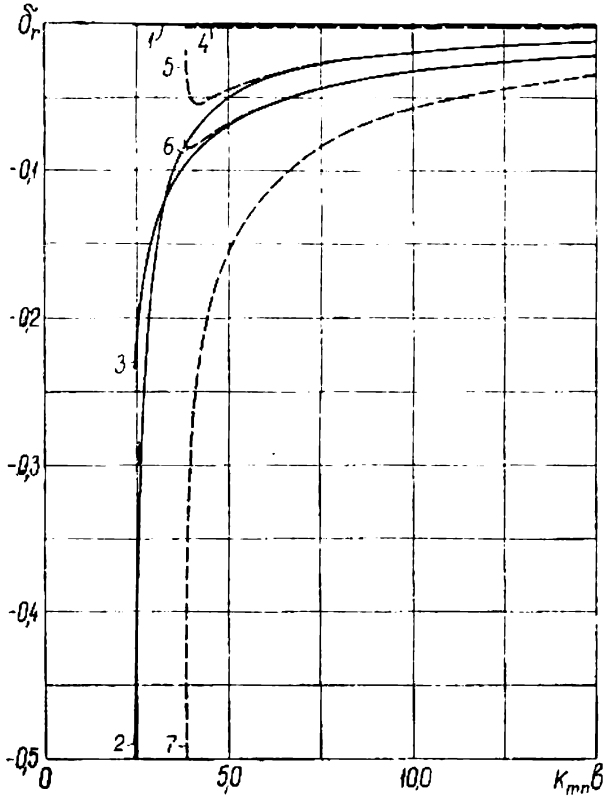


Рис. 2.

$E$ -волны; —  $m = 0$ ; — —  $m = 1$ ;  
 1 —  $E_z = 0$ ; 2 —  $\max(E_z)$ ,  $E_r, H_\varphi = 0$ ; 3 —  $\max(E_r, H_\varphi)$ ; 4 —  $E_z, E_\varphi, H_r = 0$ ; 5 —  $\max(E_z), E_r,$   
 $H_\varphi = 0$ ; 6 —  $\max(E_r, H_\varphi)$ ; 7 —  $\max(H_r, E_\varphi)$ .

определить численные значения составляющих электромагнитного поля в любой точке рассматриваемой системы.

Так как нас интересует только радиальная зависимость структуры поля от кривизны, то эту зависимость удобно представить в виде

$$\delta_r = F(k_{mn}b) = \frac{q_r - p_r}{d}. \quad (4)$$

Здесь  $\delta_r$  — радиальное смещение особенностей поля, вызванное изменением кривизны граничных поверхностей системы (особенностями мы будем называть максимумы и нули составляющих поля);

$q_r$  — положение особенностей поля при конечных значениях  $k_{mn}b$ ;

$p_r$  — их положение в системе параллельных плоскостей (т. е.  $b = \infty$ ).

Как видно из (4),  $\delta_r = 0$  соответствует совпадению положения особенности поля с ее положением в случае параллельных плоскостей (заметим,

однако, что отсюда совершенно не следует идентичность всей картины поля в этих случаях). Отрицательные значения  $\delta_r$  соответствуют смещениям особенностей поля от  $p_r$  в направлении оси системы, положительные — в обратную сторону. Величина  $\delta_r$ , по определению, может меняться в интервале  $-0,5 \leq \delta_r \leq 0,5$ .

На рис. 2 представлена зависимость  $\delta_r$  от  $k_{mn}b$  для  $E$ -волн. На идеально проводящих стенках тангенциальные составляющие электрического поля  $E_z$  и  $E_\varphi$  равны нулю. Ввиду этого, естественно, нули этих составляющих при деформации гранич не смещаются. В силу граничного условия  $(\vec{n}\vec{H}) = 0$  не смещается также нуль составляющей  $H_r$ .

В то же время нули  $E_r$  и  $H_\varphi$ , а также максимумы  $E_z$ ,  $E_r$ ,  $H_\varphi$ ,  $H_r$  и  $E_\varphi$  значительно смещаются с изменением радиуса кривизны ограничивающих коаксиал поверхностей. Наибольшее смещение испытывает максимум составляющей  $E_z$  при  $m = 0$ , который в случае параллельных плоскостей располагается точно посередине между

ними, а с переходом к коаксиалу и уменьшением его радиуса движется к внутреннему проводнику коаксиала и при  $a \rightarrow 0$  (переход к цилиндрическому волноводу) попадает в точку  $r = 0$ . Подобным же образом происходит перемещение максимумов составляющих  $H_r$  и  $E_\varphi$  для  $m = 1$ .

Из рис. 2 видно, что при некоторых  $k_{mn}b$  кривые 5 и 6 для  $m = 1$  переходят в кривые 2 и 3 для  $m = 0$ . При дальнейшем увеличении  $m$  (т. е.  $m = 2, 3, 4, \dots$ ) соответствующие кривые для достаточно больших  $k_{mn}b$  также будут сливаться с кривыми 2, 3 и 7.

Рассмотрим теперь зависимость  $\delta_r$  от  $k_{mn}b$  для  $H$ -волн, представленную на рис. 3. Из рисунка видно, что отсутствие смещения некоторых особенностей определяется граничными условиями (прямые 1 и 4). Наи-

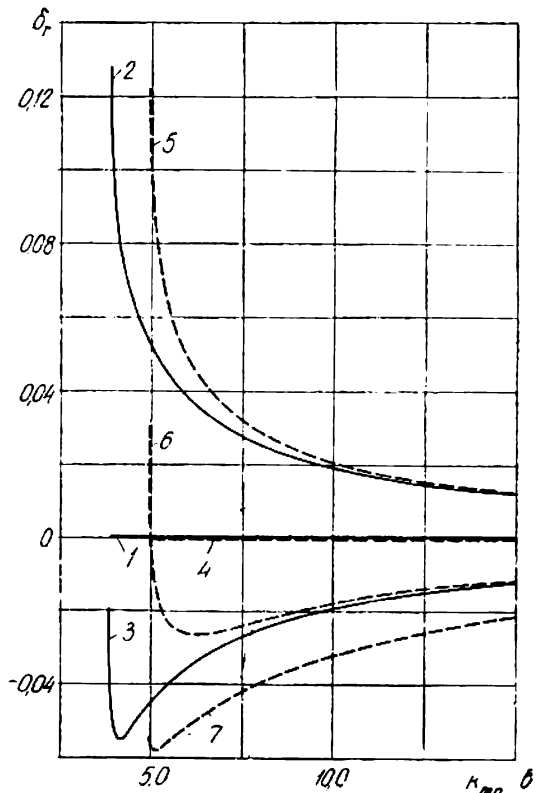


Рис. 3.

$H$ -волны: —  $m = 0$ ; ---  $m = 1$ ; 1 — макс ( $H_z$ ),  $H_r$ ,  $E_\varphi = 0$ ; 2 —  $H_z = 0$ ; 3 — макс ( $H_r$ ,  $E_\varphi$ ); 4 — макс ( $H_z$ ),  $H_r$ ,  $E_\varphi = 0$ ; 5 —  $H_z$ ,  $H_r$ ,  $E_r = 0$ ; 6 — макс ( $H_r$ ,  $E_\varphi$ ); 7 — макс ( $E_r$ ,  $H_\varphi$ ).

большее смещение в сторону от оси коаксиала испытывает нуль  $H_z$  при  $m = 0$  и 1, а также нули  $E_r$  и  $H_\varphi$  при  $m = 1$ . Смещение же остальных особенностей происходит в направлении к оси коаксиала, за исключением положения максимумов  $H_r$  и  $E_z$  для  $m = 1$  (начальные участки кривых 3 и 6).

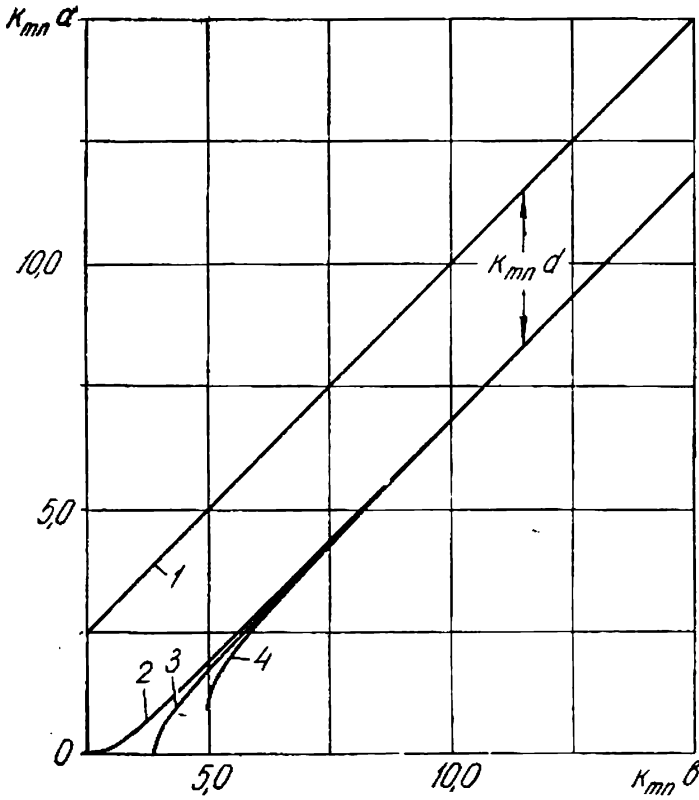


Рис. 4.

1 —  $E_{01}, H_{01}, E_{11}, H_{11}$ ; 2 —  $E_{01}$ ; 3 —  $H_{01}, E_{11}$ ; 4 —  $H_{11}$ .

Сравнение величин смещения особенностей поля показывает, что в случае  $H$ -волн максимальные величины  $\delta_r$  в несколько раз меньше, чем в случае  $E$ -волн. Различие в типах волн сказывается и на направлении смещения особенностей поля: у  $E$ -волн особенности либо не смещаются, либо движутся к оси системы, у  $H$ -волн движение особенностей происходит в обе стороны. Эти факты, полученные в результате проведенного анализа, свидетельствуют о глубоком различии в структуре поля  $E$ - и  $H$ -волн.

Заметим, что положение особенностей поля в точке  $k_{mn}b$  соответствует любому  $k \geq k_{mn}$ . При этом постоянная распространения вдоль системы вычисляется из выражения

$$k_2 = \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}.$$

Выбор расстояния  $d$  между поверхностями рассматриваемой системы по формуле (2) на первый взгляд кажется слишком условным, поскольку с изменением  $k_{mn}b$  величина  $d$  меняется. Для выяснения этого вопроса обратимся к рис. 4, где прямая 1 дает произведение внешнего радиуса коаксиала на  $k_{mn}$ , а кривые 2, 3 и 4 определяют величину внутреннего радиуса коаксиала для разных типов волн. Из рисунка видно, что изменение  $d$  вообще невелико, за исключением начальных участков кривых 2, 3 и 4. Именно этим изменением и объясняются начальные участки кривых, приведенных на рисунках 2 и 3.

Полученные данные позволяют составить более точное представление о структуре электромагнитного поля в системах с осевой симметрией и могут быть использованы при расчете и конструировании СВЧ-устройств.

---