РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ С АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

В. А. Барегамян

Рассмотрим задачу о распространении установившихся электромагнитных колебаний в кольцевом волноводе, внутренняя область которого заполнена анизотропной диэлектрической средой. Радиус металлических колец волновода равен a, расстояние между соседними кольцами d (ширина щели), период структуры l.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z так, чтобы ось oz совпала с общей осью всех колец, а начала координат поместим в середине щели.

Анизотропным диэлектриком является одноосный кристалл, ось которого направлена по оси oz. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют следующие значения: $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_0$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_e$, а остальные компоненты равны нулю.

Отыскание решения такой задачи сводится к решению однородных уравнений Максвелла, которые внутри волновода дают следующие волновые уравнения для симметричных $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \equiv 0\right)$ электрических и магнитных волн:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \left(\varepsilon_e k_0^2 - \frac{1}{r^2}\right) H_\varphi = 0 \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \left(\varepsilon_0 k_0^2 - \frac{1}{r^2}\right) E_\varphi = 0. \tag{2}$$

Как видно из (1), (2), в кольцевом волноводе с анизотропной средой возможно разделение волн на E и H типы. Остальные компоненты для симметричных волн определяются из уравнений Максвелла.

Решение симметричных волн можно представить в виде

$$\vec{H}(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_{1n}(r)\, e^{ih_n z};$$

$$\vec{E}(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_{1n}(r)\, e^{ih_n z}, \tag{3}$$

где $h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{l}$, а временной множитель здесь и далее опущен.

Подставляя (3) в (1) и (2), получим для амплитуд Фурье компонент полей следующие уравнения:

$$\frac{d^2 H_{1\varphi}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_{1\varphi}}{dr} + \left(\varepsilon_e k_0^2 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0} h_n^2 - \frac{1}{r^2}\right) H_{1\varphi} = 0 \tag{4}$$

и

$$\frac{d^2H_{1\varphi}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE_{1\varphi}}{dr}+\left(\varepsilon_0 k_0^2-h_n^2-\frac{1}{r^2}\right)E_{1\varphi}=0.$$

Обозначим

$$g_{n0}=\sqrt{\varepsilon_0 k_0^2-h_n^2} \tag{5}$$

$$g_{ne}=\sqrt{\varepsilon_e k_0^2-\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0}h_n^2}.$$

Решения (4) и (5) запишем в виде

$$H_{1\varphi}=B_n J_1(g_{ne}r); \tag{7}$$

$$E_{1\varphi}=A_n J_1(g_{n0}r). \tag{8}$$

Остальные компоненты поля определяются из уравнений Максвелла соответственно для E- и H-волн.

$$\begin{cases} E_{1r}=\dfrac{h_n}{\varepsilon_0 k_0}B_n J_1(g_{ne}r)\\ E_{1z}=\dfrac{i}{k_0\varepsilon_e}g_{ne}B_n J_0(g_{ne}r),\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} H_{1r}=-\dfrac{h_n}{k_0}A_n J_1(g_{n0}r)\\ H_{1z}=-\dfrac{ig_{n0}}{k_0}A_n J_0(g_{n0}r).\end{cases} \tag{10}$$

Вне волновода решение можно получить, заменяя функции Бесселя функциями Ханкеля первого рода. Они имеют вид

$$\begin{cases} H_{\varphi II}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}D_n H_1^{(1)}(g_n r)e^{ih_n z}\\ E_{rII}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{h_n}{k_0}D_n H_1^{(1)}(g_n r)e^{ih_n z}\\ E_{zII}=i\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{g_n}{k_0}D_n H_0^{(1)}(g_n r)e^{ih_n z},\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} E_{\varphi II}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n H_1^{(1)}(g_n r)e^{ih_n z}\\ H_{rII}=-\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{h_n}{k_0}C_n H_1^{(1)}(g_n r)e^{ih_n z}\\ H_{zII}=-i\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{g_n}{k_0}C_n H_0^{(1)}(g_n r)e^{ih_n z}.\end{cases} \tag{12}$$

Формулы (7—12) описывают распространяющиеся волны без затухания в данной системе, если аргументы функции действительные, т. е.

$$\varepsilon_0 k_0^2-h_n^2>0;$$

$$\varepsilon_e k_0^2-\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0}h_n^2>0. \tag{13}$$

Отсюда получим условие незатухания волн в волноводе

$$v_{\text{фп}}>\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \tag{14}$$

где $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ является скоростью распространения основной волны в данной среде в поперечной плоскости, $v_{\phi n}$ — фазовая скорость n-ой пространственной гармоники, а $v_{\phi 0}$ — нулевой; при этом

$$v_{\phi n} = \frac{v_{\phi 0}}{1 + \frac{n}{\varkappa c} v_{\phi 0}}. \tag{15}$$

В длинноволновом приближении можно определить $v_{\phi 0}$ из дисперсионного уравнения, которое будет зависеть от свойства среды и геометрии волновода. В общем случае в дисперсионное уравнение входят фазовые скорости всех n гармоник. Поэтому $v_{\phi 0}$ будет зависеть и от скоростей остальных гармоник.

Как видно из формулы (15), фазовая скорость n-ой пространственной положительной гармоники всегда меньше, чем фазовая скорость нулевой гармоники. Для отрицательных гармоник при выполнении условия $v_{\phi 0} > \frac{\varkappa c}{|n|}$ возможно распространение в обратную сторону. Ясно, что это имеет место при больших номерах гармоник.

Рассматриваемая система будет замедляющей, если аргументы J_0, J_1, $H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ являются мнимыми. Это имеет место, если

$$\begin{gathered} \varepsilon_0 k_0^2 - h_n^2 < 0; \\ \varepsilon_e k_0^2 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0} h_n^2 < 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Отсюда получим условие, когда система будет замедляющей:

$$v_{\phi n} < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{17}$$

Полученные поля (7—12,3) должны удовлетворять граничным условиям при $r = a$, т. е. обеспечить равенство нулю тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$ и непрерывность r — составляющей вектора $\vec{H}$ на металлических цилиндрах, а также непрерывность всего поля между цилиндрами.

Таким образом, получим системы уравнений для волны типа E и типа H соответственно:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{ne} B_n J_0(g_{ne} a) e^{ih_n z} = 0 \ \text{(на кольцах)} \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_e g_n J_1(g_{ne} a) H_0^{(1)}(g_n a) - g_{ne} J_0(g_{ne} a) H_1^{(1)}(g_n a)}{\varepsilon_e g_n H_0^{(1)}(g_n a)} \cdot B_n e^{ih_n z} = 0; \ \text{(на щелях)} \end{aligned} \right. \tag{18}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_1(g_{n0} a) e^{ih_n z} = 0 \ \text{(на кольцах)} \\ & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n0} J_0(g_{n0} a) H_1^{(1)}(g_n a) - g_n J_1(g_{n0} a) H_0^{(1)}(g_n a)}{H_1^{1}(g_n a)} A_n e^{ih_n z} = 0, \ \text{(на щелях)} \end{aligned} \right. \tag{19}$$

где учитывается, что

$$C_n = \frac{J_1(g_{n0}a)}{H_1^{(1)}(g_na)} A_n; \quad D_n = \frac{g_{ne}}{\varepsilon_e g_{ne}} \cdot \frac{J_0(g_{ne}a)}{H_1^{(1)}(g_na)} B_n. \tag{20}$$

Продифференцируем второе уравнение системы (18) и первое уравнение системы (19) по z и введем следующие обозначения:

$$\nu = \frac{h_0 l}{2\pi}; \quad \varkappa = \frac{k_0 l}{2\pi}; \quad \mu = \frac{\varkappa}{\nu} = \frac{v_{\text{ф}0}}{c}; \quad x_n = (\nu + n) J_1(g_{n0}a) A_n;$$

$$y_n = (\nu + n) \frac{\varepsilon_e g_n J_1(g_{ne}a) H_0^1(g_na) - g_{ne} J_0(g_{ne}a) H_1^{(1)}(g_na)}{\varepsilon_e g_n H_0^1(g_na)} B_n;$$

$$\xi_n^E = \frac{|\nu + n|}{\nu + n} \frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_e} + 1}{\varepsilon_e} \frac{\varepsilon_e g_n J_0(g_{ne}a) H_0^{(1)}(g_na) \sqrt{\frac{\varepsilon_e \chi^2}{(\nu+n)^2} - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0}}}{g_{ne} J_0(g_{ne}a) H_1^{(1)}(g_na) - \varepsilon_e g_n J_1(g_{ne}a) H_0^{(1)}(g_na)};$$

$$\xi_n^H = \frac{|\nu + n|}{\nu + n} \frac{H_0^{(1)}(g_na) J_1(g_{n0}a) \sqrt{\frac{\chi^2}{(\nu+n)^2} - 1} - J_0(g_{n0}a) H_1^{(1)}(g_na) \sqrt{\frac{\varepsilon_0\chi^2}{(\nu+n)^2} - 1}}{2H_1^{(1)}(g_na) J_1(g_{n0}a)};$$

$$\chi_n^E = 1 + \frac{|n|}{n} \xi_n^E; \quad \chi_n^H = 1 + \frac{|n|}{n} \xi_n^H.$$

Тогда системы (18) и (19) примут вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} y_n e^{ih_nz} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^E y_n e^{ih_nz} \quad \text{(на кольцах)} \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{ih_nz} = 0 \quad \text{(на щелях)} \end{cases} \tag{22}$$

и

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{ih_nz} = 0; \quad \text{(на кольцах)} \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} x_n e^{ih_nz} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^H x_n e^{ih_nz}. \quad \text{(на щелях)} \end{cases} \tag{23}$$

С дополнительными условиями соответственно

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m}{\nu + m} = 0; \tag{24}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{x_n}{\nu + m} = 0. \tag{25}$$

Системы (22) и (23) образуют задачу Римана—Гильберта [2]. Решение этих систем с учетом (24), (25) запишем в виде

$$R_\sigma y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} [R_\sigma V_m^n - R_m V_\sigma^n] \chi_n^E y_n; \tag{26}$$

$$m = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \cdots$$

$$R_\sigma x_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} [R_\sigma V_m^n - R_m V_\sigma^n] \chi_n^H x_n. \tag{27}$$

$$m = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \cdots$$

Здесь коэффициенты R_m, V_m^n, R_σ и V_σ^n в системе (26) зависят от аргумента $v = \cos\frac{\pi(l-d)}{l}$, а в системе (27) — от $u = \cos\frac{\pi d}{l}$. Значения этих коэффициентов определяются следующими формулами:

$$R_m(u) = \frac{1}{2}P_m(u), \quad V_m^n = \frac{m+1}{2(m-n)}[P_m(u)P_{n+1}(u) - P_{m+1}(u)P_n(u)]; \quad m \neq n$$

$$V_m^n(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n+1}\mu_{n+1-i}(u)P_{m-i}(u) & n \geqslant 0 \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{-n-1}\mu_{-n-1-i}(u)P_{i+m+1}(u) & n < -1 \\ \frac{1}{2}[P_m(u) - P_{m+1}(u)], & n = -1 \end{cases} \tag{28}$$

где

$$\mu_0(u) = 1; \quad \mu_1(u) = -u; \quad \mu_n(u) = P_n(u) - 2uP_{n-1}(u) + P_{n-2}(u); \quad (n > 2)$$

$$R_\sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^m\frac{R_m}{m+\nu} = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}P_{\nu-1}(u);$$

$$V_\sigma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^m\frac{V_m^n}{\nu+m} = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{\nu-1}{n+\nu}[P_{\nu-1}(u)P_{n+1}(u) - P_{\nu-2}(u)P_n(u)],$$

где $P_m(u)$, $P_\nu(u)$ — полиномы и функции Лежандра. Как видно из систем (26) и (27), они являются однородными и имеют нетривиальное решение только тогда, когда определители систем равны нулю. Одновременное выполнение этих условий является условием существования в кристалле одновременно симметричных электрических и магнитных волн.

Равенства нулю определителей систем (26), (27) являются дисперсионными уравнениями симметричных электрических и магнитных волн отдельно.

При выполнении условия замедления волн (17) в волноводе в полученных формулах функции Бесселя J_0 и J_1 соответственно нужно заменить на модифицированные функции Бесселя I_0 и I_1 первого рода, а функции Ханкеля $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ — на функции Макдональда K_0 и K_1.

Ясно, что аргументами I_0 и I_1 являются $g'_{n0}r$ и $g'_{ne}r$, а K_0 и K_1 — $g'_n r$. Эти аргументы определяются по формулам

$$g_{ne} = ig'_{ne}; \quad g_{n0} = ig'_{n0}; \quad g_n = ig'_n. \tag{29}$$

В длинноволновом приближении, если предположить, что $\chi_n^E = \chi_n^H = 0$ при $n = 0$, получим для симметричных электрических волн дисперсионное уравнение в виде

$$J_0(g_{0e}a) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_e}+1}\,\frac{g_{0e}J_0(g_{0e}a)H_1^{(1)}(g_0a) - \varepsilon_e g_0 J_1(g_{0e}a)}{g_0H_0^{(1)}(g_0a)\sqrt{\varepsilon_e\mu^2 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0}}}\cdot H_0(g_0a) \times$$
$$\times \frac{R_\sigma - R_\sigma V_0^0 + R_0V_\sigma^0}{R_\sigma V_0^0 - R_0V_\sigma^0}, \tag{30}$$

а для симметричных магнитных волн имеем

$$J_0(g_{00}a) = \frac{H_0^{(1)}(g_0a)\,J_1(g_{00}a)\sqrt{\mu^2-1} - J_0(g_{00}a)\,H_1^{(1)}(g_0a)\sqrt{\varepsilon_0\mu^2-1}}{2H_1^{(1)}(g_0a)} \times$$

$$\times \frac{R_{\text{э}}V_0^0 - R_0V_{\text{э}}^0}{R_{\text{э}} - R_{\text{э}}V_0^0 + R_0V_{\text{э}}^0}. \qquad (31)$$

Формулы (30) и (31) при малых $\varkappa\,(\varkappa << 1)$ переходят в формулы (36) работы [1], когда $\varepsilon_0 = \varepsilon_e = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович и В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXIV, 11, 1964.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, XXXII, 4, 1962.