К ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ВОЛНОВОДОВ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

С. С. Третьякова

Задача о возбуждении кольцевого волновода, находящегося в свободном пространстве, электрическим и магнитным диполем решена в работах В. А. Марченко и В. Г. Сологуба [1], [2]. Метод, использованный в этих работах, может быть распространен на случай возбуждения кольцевых волноводов, находящихся в диэлектрической среде. Следуя этому методу, в данной работе рассматривается возбуждение электрическим диполем бесконечно протяженного диэлектрического канала в изотропной диэлектрической среде, на поверхности которого периодически расположены идеально проводящие бесконечно тонкие металлические кольца. Соотношение между периодом структуры, шириной колец, радиусом канала и длиной волны может быть произвольным.

§ 1. Постановка и строгое решение задачи

Рассматриваемый кольцевой волновод представляет собой бесконечный цилиндрический канал радиуса a в изотропной диэлектрической среде с проницаемостью ε, нагруженный бесконечно тонкими идеально проводящими кольцами такого же радиуса. Ширина колец — $l - d$, период их — l.

Начало цилиндрической системы координат (r, φ, z) помещено в середине щели между двумя произвольными соседними кольцами.

Кольцевой волновод возбуждается неподвижным электрическим диполем, находящимся в начале координат. Момент диполя равен единице и направлен вдоль оси волновода oz. Дипольный момент гармонически изменяется во времени пропорционально $\exp(-i\omega t)$.

Излучение диполя в любой точке пространства характеризуется вектором Герца

$$\vec{\Pi} = \vec{z}_0 \Pi, \tag{1}$$

где $\vec{z}_0$ — орт оси oz, Π — функция координат и значения диэлектрической проницаемости ε в точке наблюдения, а множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опускается.

Как известно, в свободном пространстве и в однородной диэлектрической среде вектор Герца точечного диполя определяется соответственно следующим образом:

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} \left(r \sqrt{k^2 - h_0^2}\right) e^{ih_0 z} dh_0; \tag{2}$$

$$\Pi_д = \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}R}}{R} = \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(r\sqrt{k^2\varepsilon - h_0^2}\right)e^{ih_0z}dh_0, \tag{3}$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода.

При наличии границы раздела $r = a$ вектор Герца (1) можно представить

$$\Pi = \begin{cases} \Pi_0 - \Pi_1 & r \leqslant a \\ \Pi_д - \Pi_1, & r \geqslant a \end{cases} \tag{4}$$

где Π_1 целесообразно искать в виде

$$\Pi_1 = \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_0^2 H_0^{(1)}(p_0 a)\, U(r, z, h_0, \varepsilon)\, e^{ih_0z}dh_0. \tag{5}$$

Здесь и далее пользуемся обозначением

$$p_0 = \sqrt{k^2 - h_0^2}; \quad g_0 = \sqrt{k^2\varepsilon - h_0^2}$$

(подразумевается, что $\operatorname{Im} p_0, g_0 > 0$).

Неизвестная функция $U(r, z, h_0, \varepsilon)$, определяющая решение задачи о возбуждении рассматриваемого периодического волновода, должна удовлетворять следующим требованиям. Во-первых, поскольку Π_1 удовлетворяет волновому уравнению, то и $U(r, z, h_0, \varepsilon)$ должна удовлетворять соответствующим волновым уравнениям в первой ($r < a$) и во второй ($r > a$) областях. Во-вторых, в связи с тем, что Π_1 представляет поле, обусловленное периодической границей раздела $r = a$, то $U(r, z, h_0, \varepsilon)$ должна быть периодической функцией z с периодом l.

Учитывая эти соображения, искомую функцию можно записать в виде

$$U(r, z, h_0, \varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n J_0(p_n r)\, e^{i\frac{2\pi n}{l}z} & (r < a) \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_n H_0^{(1)}(g_n r)\, e^{i\frac{2\pi n}{l}z}, & (r > a) \end{cases} \tag{6}$$

где

$$p_n = \sqrt{k^2 - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad g_n = \sqrt{k^2\varepsilon - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{l}\right)^2};$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя. Неизвестные коэффициенты α_n, $\tilde{\alpha}_n$ находятся из подчинения электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\rm I} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi}, \quad \vec{H}_{\rm I} = -ik\operatorname{rot}\vec{\Pi}, \quad (r < a) \\ \vec{E}_{\rm II} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} + k^2\varepsilon\,\vec{\Pi}, \quad \vec{H}_{\rm II} = -ik\varepsilon\operatorname{rot}\vec{\Pi} \quad (r > a) \end{aligned} \tag{7}$$

точным граничным условиям на поверхности раздела $r = a$:

$$\begin{aligned} &E_{z\rm I} = E_{z\rm II} = 0 && \text{(на металле);} \\ &E_{z\rm I} = E_{z\rm II} \quad H_{\varphi\rm I} = H_{\varphi\rm II} && \text{(на щелях).} \end{aligned} \tag{8}$$

Равенство $E_{zI} = E_{zII}$, выполняющееся на всем периоде структуры, обнаруживает следующую связь между α_n и $\tilde{\alpha}_n$:

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 \frac{p_0^2}{g_0^2} \frac{J_0(p_0 a)}{H_0^{(1)}(g_0 a)} + \frac{1}{p_0^2 H_0^{(1)}(p_0 a)} - \frac{1}{g_0^2 H_0^{(1)}(g_0 a)}$$

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n \frac{p_n^2}{g_n^2} \frac{J_0(p_n a)}{H_0^{(1)}(g_n a)},$$

а оставшиеся независимые граничные условия приводят к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_n:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n p_n^2 J_0(p_n a)\, e^{ih_n z} = e^{ih_0 z}; \qquad \left(\frac{d}{2} < |z| < \frac{l}{2}\right); \tag{9a}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n p_n \left[\frac{p_n \varepsilon}{g_n} J_0(p_n a) \frac{H_1^{(1)}(g_n a)}{H_0^{(1)}(g_n a)} - J_1(p_n a)\right] e^{ih_n z} =$$

$$= \left[\frac{\varepsilon}{g_0} \frac{H_1^{(1)}(g_0 a)}{H_0^{(1)}(g_0 a)} - \frac{1}{p_0} \frac{H_1^{(1)}(p_0 a)}{H_0^{(1)}(p_0 a)}\right] e^{ih_0 z}. \qquad \left(|z| < \frac{d}{2}\right) \tag{9б}$$

Введем обозначения

$$\varphi = \frac{2\pi}{l} z, \quad \theta = \frac{\pi d}{l}, \quad \Delta = \frac{l}{2\pi a}, \quad \varkappa = ka, \quad \frac{h_0 l}{2\pi} = m_0 + \mu,$$

m_0 — ближайшее целое число, $|\mu| \leqslant \frac{1}{2}$, $h_n = \frac{2\pi}{l}(m_0 + n + \mu)$,

$$Q_n(\varepsilon) = J_1(p_n a)\, H_0^{(1)}(g_n a) - \frac{p_n \varepsilon}{g_n} J_0(p_n a)\, H_1^{(1)}(g_n a),$$

$$a_{n+m_0} = \alpha_n p_n^2 J_0(p_n a),$$

тогда уравнения (9) преобразуются к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+m_0} e^{i(m_0+n+\mu)\varphi} = e^{i(m_0+\mu)\varphi}; \qquad (\theta < |\varphi| < \pi) \tag{10a}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+m_0} \frac{Q_n(\varepsilon)}{p_n J_0(p_n a)\, H_0^{(1)}(g_n a)} e^{i(m_0+n+\mu)\varphi} = -\Phi_0' e^{i(m_0+\mu)\varphi}, \qquad (|\varphi| < \theta) \tag{10б}$$

где

$$\Phi_0' = -\frac{g_0 H_0^{(1)}(g_0 a)\, H_1^{(1)}(p_0 a) - p_0 \varepsilon H_0^{(1)}(p_0 a)\, H_1^{(1)}(g_0 a)}{p_0 g_0 H_0^{(1)}(g_0 a)\, H_0^{(1)}(p_0 a)}.$$

Можно показать, что множитель, входящий в левую часть равенства (10б), представляется в виде

$$\frac{Q_n(\varepsilon)}{p_n J_0(p_n a)\, H_0^{(1)}(g_n a)} = \frac{|m_0 + n|}{m_0 + n} \cdot \frac{(1+\varepsilon)\, a\Delta}{(m_0 + n + \mu)} (1 - \chi_{m_0 + n}), \tag{11}$$

где χ_k с ростом k убывает как $0\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Более точная оценка χ_k при $k \to \infty$ дает выражение

$$|\chi_k| < \frac{\Delta^2}{2(k+\mu)^2}\left(\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\varkappa^2 + 2C\right)\left[1 - \frac{1+\varepsilon}{2}\frac{\varkappa^2\Delta^2}{(k+\mu)^2}\right]^{-3/2}. \tag{12}$$

Учитывая (11), систему уравнений (10) после некоторых преобразований можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - \delta_k^{m_0}) e^{ik\varphi} = 0; \qquad (\theta < |\varphi| < \pi) \tag{13а}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - \delta_k^{m_0}) \frac{|k|}{k} e^{ik\varphi} = -\frac{|m_0|}{m_0} B_0 e^{im_0\varphi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{|k|}{k} \chi_k e^{ik\varphi}; \qquad (|\varphi| < \theta) \tag{13б}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{k+\mu} \frac{|k|}{k} = -\Phi_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{k+\mu} \frac{|k|}{k} \chi_k, \tag{13в}$$

где

$$B_0 = 1 + \frac{|m_0|}{m_0} (m_0 + \mu) \Phi_0;$$

$$\Phi_0 = \frac{g_0 H_0^{(1)}(g_0 a) H_1^{(1)}(p_0 a) - p_0 \varepsilon H_0^{(1)}(p_0 a) H_1^{(1)}(g_0 a)}{(1+\varepsilon) a \Delta p_0 g_0 H_0^{(1)}(g_0 a) H_0^{(1)}(p_0 a)};$$

$$\delta_k^{m_0} = \begin{cases} 1 & k = m_0 \\ 0. & k \neq m_0 \end{cases}$$

Как показано в работе [1], [2], система уравнений, аналогичная полученной здесь, образует задачу Римана—Гильберта, решением которой является бесконечная система линейных алгебраических уравнений, и может быть приведена к виду

$$(a_0 - \delta_0^{m_0}) \frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u)} = \mu \left[-\frac{|m_0|}{m_0} B_0 V^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \chi_n V^n(u) \right] \tag{14а}$$

$$a_m - \delta_m^{m_0} = -\frac{|m_0|}{m_0} B_0 V_m^{m_0} + (a_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) P_m(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{|n|}{n} \chi_n V_m^n \tag{14б}$$

где

$$V_m^n = \frac{m+1}{2(m-n)} [P_m(u) P_{n+1}(u) - P_{m+1}(u) P_n(u)]; \qquad (m \neq n)$$

$$V^n(u) = \frac{1}{n+\mu} \left\{ P_n(u) - \frac{P_{\mu-1}(-u)}{P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u)} [P_n(u) - P_{n-1}(u)] \right\}; \tag{15}$$

$P_n(u)$ — полиномы Лежандра; $P_\mu(-u)$ — функции Лежандра; $u = \cos \frac{\pi d}{l}$.

Можно показать, что для получения решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (14) можно воспользоваться методом редукции. Следовательно, система уравнений (14) пригодна для отыскания возбужденного диполем электромагнитного поля с любой степенью точности.

§ 2. Приближенное решение основных уравнений

Система уравнений (14) аналогична системе уравнений работы [2]. Поэтому можно воспользоваться некоторыми результатами этой работы для получения приближенного решения задачи в длинноволновом приближении, а именно, в интервале $2\varkappa\Delta \sqrt{\varepsilon} < 1$.

Следуя [2], получим

$$a_0 - \delta_0^{m_0} = -\mu \times$$

$$\times \frac{(1-\chi_{m_0}) B_0 \frac{|m_0|}{m_0} V^{m_0}(u) - \sum\limits_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \chi_n V^n(u) \left[\theta_n^{m_0}(u) - \frac{|m_0|}{m_0} B_0 W_n^{m_0}(u)\right]}{\frac{P_{-\mu}(-u) - P_\mu(-u)}{P_{-\mu}(-u) + P_\mu(-u)} + 1 - \chi_0 - \mu \sum\limits_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \chi_n V^n(u) \left[(n+\mu) V^n(u) + \theta_n(u)\right]}, \qquad (16)$$

где

$$|\theta_m(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq 0} |(m+\mu) V^m(u)| < 3 \sqrt{2\pi} \sqrt{1+u} \frac{q}{1-q};$$

$$|\theta_m^{m_0}(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq 0} \left|\delta_m^{m_0} - \frac{|m_0|}{m_0} B_0 W_m^{m_0}(u)\right| < C_1 [1 + B_0 \ln (|m_0| + 1)] \frac{q}{1-q}$$

и

$$q = \max_{m \neq 0} \sum |\chi_n W_m^n(u)|;$$

$$q < C_2 \frac{\Delta^2 \left(\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \varkappa^2 + 1\right) \sqrt{1-u}}{[1 - 2(\varepsilon+1) \varkappa^2 \Delta^2]^{3/2}};$$

C_1, C_2 — константы, не зависящие от параметров задачи.

Согласно введенным ранее соотношениям,

$$\alpha_n = \frac{a_n + m_0}{p_n^2 J_0(p_n a)}.$$

Подставив это выражение в (6), получим:

$$U(r, z, h_0, \varepsilon) e^{ih_0 z} =$$

$$= \begin{cases} a_0 \dfrac{J_0(p_{-m_0} r)}{p_{-m_0}^2 J_0(p_{-m_0} a)} e^{i\frac{2\pi}{l}\mu z} + \sum\limits_{m \neq 0} \dfrac{a_m}{p_{m-m_0}^2} \dfrac{J_0(p_{m-m_0} r)}{J_0(p_{m-m_0} a)} e^{i\frac{2\pi}{l}(m+\mu) z} & (r < a) \\ a_0 \dfrac{H_0^{(1)}(g_{-m_0} r)}{g_{-m_0}^2 H_0^{(1)}(g_{-m_0} a)} e^{i\frac{2\pi}{l}\mu z} + \sum\limits_{m \neq 0} \dfrac{a_m}{g_{m-m_0}^2} \dfrac{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} r)}{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} a)} e^{i\frac{2\pi}{l}(m+\mu) z} - & \\ - \dfrac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{g_0^2 H_0^{(1)}(g_0 a)} e^{i\frac{2\pi}{l}\mu z} + \dfrac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{p_0^2 H_0^{(1)}(p_0 a)} e^{i\frac{2\pi}{l}\mu z}. & (r > a) \end{cases} \qquad (17)$$

В интервале $2\varkappa\Delta\sqrt{\varepsilon} < 1$ величины $p_{m-m_0} a$ и $g_{m-m_0} a$ $(m \neq 0)$ принимают чисто мнимые значения, причем для внутренней и внешней области справедливы оценки

$$\frac{J_0(p_{m-m_0} r)}{J_0(p_{m-m_0} a)} < C_3 e^{-\frac{\sqrt{1-4\varkappa^2\Delta^2}}{\Delta}\left(|m| - \frac{1}{2}\right)\theta'}; \qquad (r < a(1-\theta'))$$

$$\frac{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} r)}{H_0^{(1)}(g_{m-m_0} a)} < C_3 e^{-\frac{\sqrt{1-4\varkappa^2\Delta^2\varepsilon}}{\Delta}\left(|m| - \frac{1}{2}\right)\theta'}. \qquad (r > a(1+\theta')) \qquad (18)$$

Тогда $U(r, z, h_0, \varepsilon)$ принимает следующий вид:

$$U(r, z, h_0, \varepsilon)e^{ih_0 z} =$$

$$= \begin{cases} a_0 \dfrac{J_0(p_{-m_0}r)}{p^2_{-m_0}J_0(p_{-m_0}a)} e^{i\frac{2\pi}{l}\mu z} + \tilde{U}_1(r, z, h_0, \varepsilon) & (r < a) \\ \left[a_0 \dfrac{H_0^{(1)}(g_{-m_0}r)}{g^2_{-m_0}H_0^{(1)}(g_{-m_0}a)} - \dfrac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{g_0^2 H_0^{(1)}(g_0 a)} + \dfrac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{p_0^2 H_0^{(1)}(p_0 a)}\right] e^{i\frac{2\pi}{l}\mu z} + \\ \qquad + \tilde{U}_2(r, z, h_0, \varepsilon), & (r > a) \end{cases} \tag{19}$$

где

$$|\tilde{U}_1(r, z, h_0, \varepsilon)| < C_1\Delta^2 \frac{\ln(1 + |m_0 + \mu|)}{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{1 - 4\varkappa^2\Delta^2}}{\Delta}\theta'};$$

$$|\tilde{U}_2(r, z, h_0, \varepsilon)| < C_2\Delta^2 \frac{\ln(1 + |m_0 + \mu|)}{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{1 - 4\varkappa^2\Delta^2\varepsilon}}{\Delta}\theta'}, \tag{20}$$

а a_0 определяется формулой (16).

Если теперь выражения (19) подставить в (4), то получим приближенное значение вектора Герца в длинноволновом приближении, при этом оно будет, очевидно, тем точнее, чем меньше величина $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$, т. е. чем гуще расположены кольца при постоянном радиусе канала.

Рассмотрим предельный случай, когда $\Delta \to 0$. В этом случае a_0 ведет себя при $m_0 \neq 0$, как $a_0 = \Delta \cdot O(1)$, и при $m_0 = 0$

$$\lim_{\Delta\to 0} a_0 = \frac{(1 + \varepsilon)p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)}{1 + (1 + \varepsilon)p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)}, \tag{21}$$

где

$$Q = -\lim_{\Delta\to 0} \Delta \ln \frac{1 - u}{2}. \tag{22}$$

Переходя к пределу в выражении Π_1 при $\Delta \to 0$ и учитывая (21) и (20), получим

$$\lim_{\Delta\to 0}\Pi_1 = \begin{cases} \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} J_0(p_0 r) \dfrac{(1 + \varepsilon)p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} H_0^{(1)}(p_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)}{1 + (1 + \varepsilon)\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)\cdot p_0 a} e^{ih_0|z|}dh_0 & (r < a) \\ \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{p_0^2}{g_0^2} H_0^{(1)}(g_0 r) \dfrac{(1 + \varepsilon)p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(p_0 a)}{1 + (1 + \varepsilon)p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(g_0 a)} e^{ih_0|z|}dh_0. & (r > a) \end{cases} \tag{23}$$

Запишем полученные интегралы в несколько ином виде. Подынтегральная функция зависит от аргументов $p_0 a$ и $g_0 a$, которые являются двузначными функциями и имеют точки ветвления. Тогда интегрирование по отрезку $(-R, R)$ при $R \to \infty$ можно заменить интегрированием по полуокружности радиуса R с петлями γ_1 и γ_2, охватывающими разрезы в верхней полуплоскости комплексного переменного h_0 вдоль линий $k = \mathrm{const}$ и $k\sqrt{\varepsilon} = \mathrm{const}$, и учесть при этом сумму вычетов относительно полюсов, попадающих в область интегрирования.

Производя некоторые преобразования и учитывая изменение подынтегральной функции при переходе через разрезы, получим следующие выражения:

$$\lim_{\Delta\to 0}\Pi_1 = 2\pi i\sum \mathrm{Res} + i\int\limits_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(p_0 r)\times$$

$$\times\left\{-1+\frac{1}{\left[1+(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)\right]^{(л)}}\right\}e^{ih_0|z|}dh_0 +$$

$$+\frac{i}{2}\int\limits_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} J_0(p_0 r)\frac{(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}H_0^{(1)}(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)\Big|_{(л)}^{(п)}e^{ih_0|z|}dh_0}{\left[1+(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)\right]^{(л)}\left[1+(1+\varepsilon)p_0 a\times\right.}; \quad (r<a)$$

$$\left.\times\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)\right]^{(п)} \tag{24}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\Pi_1 = 2\pi i{\sum}'\mathrm{Res} + i\int\limits_{k+i0}^{k+i\infty} H_0^{(1)}(g_0 r)\frac{p_0^2}{g_0^2}\times$$

$$\times\frac{(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)J_0(p_0 a)}{\left[1+(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)\right]}e^{ih_0|z|}dh_0 +$$

$$+ i\int\limits_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty}\left\{-J_0(g_0 r)-\frac{1}{2}\frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{\left[1+(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)\right]}\Bigg|_{(п)}^{(л)}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)J_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 r)}{1+(1+\varepsilon)p_0 a\frac{Q}{Q_0(\varepsilon)}J_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)}\right]^{(л)}\frac{p_0^2}{g_0^2}\right\}e^{ih_0|z|}dh_0; \quad (r>a), \tag{25}$$

$f^{(л)}$ и $f^{(п)}$ означают значения функции на правом и левом берегах разреза; $f\Big|_{(п)}^{(л)} = f^{(л)} - f^{(п)}$.

Для вычисления суммы вычетов необходимо учесть полюса подынтегральной функции в (23). Они определятся как корни уравнения:

$$\frac{(1+\varepsilon)QJ_0(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)\cdot p_0 a}{-\frac{p_0\varepsilon}{g_0}J_0(p_0 a)H_1^{(1)}(g_0 a)+J_1(p_0 a)H_0^{(1)}(g_0 a)}+1=0. \tag{26}$$

Отметим, что (26) есть дисперсионное уравнение рассматриваемого волновода (в длинноволновом приближении), набор корней этого уравнения даст совокупность собственных значений постоянной распространения электромагнитных волн в рассматриваемой структуре.

Определяя вычеты функций по соответствующим формулам и обозначая их через A_ν^+ и A_ν^- для ν корня уравнения (26), получим:

$$2\pi i\sum\mathrm{Res} = -\sum_\nu A_\nu^+ J_0\left(r\sqrt{k^2-h_{0\nu}^2}\right)e^{ih_{0\nu}|z|}; \quad (r<a)$$

$$2\pi i{\sum}'\mathrm{Res} = -\sum_\nu A_\nu^- H_0^{(1)}\left(r\sqrt{k^2\varepsilon-h_{0\nu}^2}\right)e^{ih_{0\nu}|z|}; \quad (r>a) \tag{27}$$

при этом из выражений для вычетов следует связь

$$A_\nu^- J_0 \left(a\sqrt{k^2 - h_{0\nu}^2}\right) \frac{(k^2 - h_{0\nu}^2)}{(k^2\varepsilon - h_{0\nu}^2)} = A_\nu^+ H_0^{(1)} \left(a\sqrt{k^2\varepsilon - h_{0\nu}^2}\right).$$

Так как $\Pi = \begin{cases} \Pi_0 - \Pi_1 & (r < a) \\ \Pi_д - \Pi_1 & (r > a) \end{cases}$ и Π_0, $\Pi_д$ можно представить в виде

$$\Pi_0 = -i \int\limits_{k+i0}^{k+i\infty} J_0 \left(r\sqrt{k^2 - h_0^2}\right) e^{ih_0|z|} dh_0;$$

$$\Pi_д = -i \int\limits_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} J_0 \left(r\sqrt{k^2\varepsilon - h_0^2}\right) e^{ih_0|z|} dh_0,$$

то окончательное выражение для вектора Герца электромагнитного поля, возбуждаемого электрическим диполем, запишется так:

$$\lim_{\Delta\to 0} \Pi = \sum_\nu A_\nu^+ J_0 \left(r\sqrt{k^2 - h_{0\nu}^2}\right) e^{ih_{0\nu}|z|} - i \times$$

$$\times \int\limits_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{J_0(p_0 r)\, e^{ih_0|z|} dh_0}{1 + (1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 a)} - \frac{i}{2} \int\limits_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} J_0(p_0 r) \times$$

$$\times \frac{(1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} H_0^{(1)}(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 a) \Big|_{(л)}^{(п)} e^{ih_0|z|} dh_0}{\left[1+(1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 a)\right]^{(п)} \left[1+(1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 a)\right]^{(л)}}; \quad (r<a) \tag{28}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \Pi = \sum_\nu A_\nu^- H_0^{(1)} \left(r\sqrt{k^2\varepsilon - h_{0\nu}^2}\right) e^{ih_{0\nu}|z|} - i \int\limits_{k+i0}^{k+i\infty} H_0^{(1)}(g_0 r) \frac{p_0^2}{g_0^2} \times$$

$$\times \frac{(1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, J_0(p_0 a)\, e^{ih_0|z|}}{1 + (1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 a)} +$$

$$+ \frac{i}{2} \int\limits_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} \left\{ \frac{H_0^{(1)}(g_0 r)}{1 + (1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 a)} \Bigg|_{(л)}^{(п)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, J_0(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 r)}{1 + (1+\varepsilon)\, p_0 a \frac{Q}{Q_0(\varepsilon)} J_0(p_0 a)\, H_0^{(1)}(g_0 a)} + \frac{p_0^2 - g_0^2}{p_0^2} J_0(g_0 r) \right\} \frac{p_0^2}{g_0^2} e^{ih_0|z|} dh_0. \quad (r > a) \tag{29}$$

При $\varepsilon = 1$ выражения (28), (29) переходят в соответствующие выражения работы [2].

Для исследования вопроса о характере зависимости поля от координаты z необходимо рассмотреть поведение корней уравнения (26), т. е. исследовать дисперсионное уравнение системы.

§ 3. Возбуждение сплошного металлического волновода и цилиндрической полости в диэлектрике

В качестве предельных можно рассмотреть случаи, когда $u = 1$ ($d = 0$), т. е. случай сплошного волновода, и когда $u = -1$ ($d = l$), т. е. случай цилиндрического канала в диэлектрической среде.

Задачи о возбуждении сплошного волновода и диэлектрического канала можно было бы решить, если перейти к соответствующим пределам в выражениях для вектора Герца (28), (29). Однако ввиду сложности этих выражений такие переходы не очевидны. Обе задачи можно решить самостоятельно, используя прежний метод.

1. Если электрический диполь находится на оси сплошного волновода, то вектор Герца возбуждаемого электромагнитного поля определяется следующим выражением:

$$\Pi = \Pi_0 - \Pi_1 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(r\sqrt{k^2-h^2}\right)e^{ihz}dh -$$

$$-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(k^2-h^2)\,H_0^{(1)}\left(a\sqrt{k^2-h^2}\right)U(r,\ z,\ h)\,e^{ihz}dh. \qquad (30)$$

Функция $U(r,\ z,\ h)$ должна удовлетворять волновому уравнению и граничным условиям на поверхности волновода. Выбирая ее соответствующим образом, получим

$$\Pi = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{H_0^{(1)}\left(r\sqrt{k^2-h^2}\right) - \frac{H_0^{(1)}\left(a\sqrt{k^2-h^2}\right)}{J_0\left(a\sqrt{k^2-h^2}\right)}J_0\left(r\sqrt{k^2-h^2}\right)\right\}e^{ihz}dh. \qquad (31)$$

Преобразовывая интеграл по отрезку $(-R,\ R)$, выражение (31) можно привести к виду

$$\Pi = -i\int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(pr)\,e^{ih|z|}dh - 2\pi i\sum \mathrm{Res} + i\int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(pr)\,e^{ih|z|}dh. \qquad (32)$$

Вычеты берутся по всем полюсам функции

$$\frac{H_0^{(1)}\left(a\sqrt{k^2-h^2}\right)}{J_0\left(a\sqrt{k^2-h^2}\right)}J_0\left(r\sqrt{k^2-h^2}\right)e^{ih|z|}.$$

Если через $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_\nu$ обозначить корни $J_0\left(a\sqrt{k^2-h^2}\right)$, лежащие в верхней полуплоскости комплексного переменного h, то вычеты определятся так:

$$2\pi i\sum \mathrm{Res} = -\sum_\nu A_\nu J_0\left(r\sqrt{k^2-h_\nu^2}\right)e^{ih_\nu|z|}, \qquad (33)$$

где

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{H_0^{(1)}\left(a\sqrt{k^2-h_\nu^2}\right)}{J_1\left(a\sqrt{k^2-h_\nu^2}\right)}.$$

Уравнение $J_0\left(a\sqrt{k^2-h^2}\right) = 0$ является дисперсионным уравнением для сплошного волновода, а $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_\nu$ — набор собственных значений постоянной распространения в волноводе. Окончательное выражение для вектора Герца имеет вид

$$\Pi = \sum_\nu A_\nu J_0\left(r\sqrt{k^2-h_\nu^2}\right)e^{ih_\nu|z|}, \qquad (34)$$

что совпадает с известными в литературе решениями.

Таким образом, в отличие от кольцевого волновода электромагнитное поле в сплошном волноводе имеет только экспоненциальную зависимость от z.

2. Если кольцевой волновод отсутствует, то находящийся на оси бесконечного канала в изотропном диэлектрике электрический диполь, ориентированный вдоль oz, возбуждает электромагнитное поле, вектор Герца (1) для которого имеет вид (4′), где

$$\Pi_1 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} Ap^2 H_0^{(1)}(pa)\, J_0(pr)\, e^{ihz} dh; \qquad (r < a) \tag{35а}$$

$$\Pi_1 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} Bp^2 H_0^1(pa)\, H_0^{(1)}(gr)\, e^{ihz} dh. \qquad (r > a) \tag{35б}$$

Здесь $p = \sqrt{k^2 - h^2}$; $g = \sqrt{k^2\varepsilon - h^2}$; Π_0, $\Pi_д$ такие же, как и (2), (3). Коэффициенты A, B находятся из подчинения поля соответствующим граничным условиям. После вычисления A, B величины Π_1 запишутся следующим образом:

$$\Pi_1 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} J_0(pr)\, \frac{gH_0^{(1)}(ga)\, H_1^{(1)}(pa) - p\varepsilon H_0^{(1)}(pa)\, H_1^{(1)}(ga)}{gJ_1(pa)\, H_0^{(1)}(ga) - p\varepsilon J_0(pa)\, H_1^{(1)}(ga)}\, e^{ihz} dh; \qquad (r < a) \tag{36а}$$

$$\Pi_1 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(gr)\left\{1 + \frac{2i}{\pi ga}\, \frac{1}{[p\varepsilon J_0(pa)\, H_1^{(1)}(ga) - gJ_1(pa)\, H_0^{(1)}(ga)]}\right\} e^{ihz} dh. \qquad (r > a) \tag{36б}$$

Легко видеть, что при $\varepsilon = 1$ величины $\Pi_1 = 0$, и излучение диполя характеризуется только вектором Герца Π_0 для свободного пространства.

После некоторых преобразований (36) величины Π_1 для канала в диэлектрике приводятся к виду

$$\Pi_1 = 2\pi i \sum \mathrm{Res} - i\int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(p_0 r)\, e^{ih|z|} dh - i\int_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} J_0(pr) \times$$

$$\times \frac{\dfrac{4\varepsilon}{\pi^2 g^2 a^2}\cdot e^{ih|z|} dh}{\left[-\dfrac{p\varepsilon}{g} J_0(pa)\, H_1^{(1)}(ga) + J_1(pa)\, H_0^{(1)}(ga)\right]^{(л)} \left[-\dfrac{p\varepsilon}{g} J_0(pa)\, H_1^{(1)}(ga) + J_1(pa) H_0^{(1)}(ga)\right]^{(п)}}, \qquad (r < a) \tag{37а}$$

$$\Pi_1 = 2\pi i {\sum}' \mathrm{Res} - \frac{i}{2}\int_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} \Biggl\{ -2J_0(pr) -$$

$$- \frac{2i}{\pi g^2 a^2}\, \frac{H_0^{(1)}(gr)}{\left[-\dfrac{p\varepsilon}{g} J_0(pa)\, H_1^{(1)}(ga) + J_1(pa)\, H_0^{(1)}(ga)\right.}\Biggr|_{(л)}^{(п)} \Biggr\} e^{ih|z|} dh \qquad (r > a) \tag{37б}$$

где вычеты берутся по всем полюсам подынтегральных функций в выражениях (36). Если через h_1', h_2', ..., h_ν' опять обозначить корни функции $p\varepsilon J_0(pa) H_1^{(1)}(ga) - gJ_1(pa) H_0^{(1)}(ga)$, лежащие в верхней полуплоскости комплексного переменного h, то вычеты определяются как

$$2\pi i \sum \mathrm{Res} = -\sum_{\nu} B_\nu^+ J_0 (r \sqrt{k^2 - h_\nu'^2})\, e^{ih_\nu'|z|}; \tag{38а}$$

$$2\pi i \sum{}' \mathrm{Res} = -\sum_{\nu} B_\nu^- H_0^{(1)} (r \sqrt{k^2\varepsilon - h_\nu'^2})\, e^{ih_\nu'|z|}. \tag{38б}$$

Уравнение

$$p\varepsilon J_0(pa) H_1^{(1)}(ga) - gJ_1(pa) H_0^{(1)}(ga) = 0 \tag{39}$$

является дисперсионным уравнением для канала в диэлектрической среде.

Окончательное выражение для вектора Герца

$$\Pi = \sum_{\nu} B_\nu^+ J_0 (r \sqrt{k^2 - h_\nu'^2})\, e^{ih_\nu'|z|} + i \int\limits_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} J_0(pr) \times$$

$$\times \frac{\dfrac{4\varepsilon}{\pi^2 g^2 a^2}\, e^{ih|z|}\, dh}{\left[-\dfrac{p\varepsilon}{g} J_0(pa) H_1^{(1)}(ga) + J_1(pa) H_0^{(1)}(ga)\right]^{(л)} \left[-\dfrac{p\varepsilon}{g} J_0(pa) H_1^{(1)}(ga) + J_1(pa) H_0^{(1)}(ga)\right]^{(п)}}; \quad (r < a) \tag{40а}$$

$$\Pi = \sum_{\nu} B_\nu^- H_0^{(1)} (r \sqrt{k^2\varepsilon - h_\nu'^2})\, e^{ih_\nu'|z|} +$$

$$+ \frac{i}{2} \int\limits_{k\sqrt{\varepsilon}+i0}^{k\sqrt{\varepsilon}+i\infty} \frac{2i}{\pi \cdot ga} \cdot \left. \frac{H_0^{(1)}(gr)}{-p\varepsilon J_0(pa) H_1^{(1)}(ga) + gJ_1(pa) H_0^{(1)}(ga)} \right|_{(л)}^{(п)} e^{ih|z|}\, dh. \quad (r > a) \tag{40б}$$

Таким образом, при распространении электромагнитных волн в цилиндрическом канале в диэлектрической среде поле имеет зависимость от z как экспоненциальную, так и алгебраическую. Пределы, в которых преобладает та или иная зависимость, могут быть определены после исследования дисперсионного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко. Первая летняя математическая школа, ч. I, изд-во «Наукова думка», 1963.
2. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб. «Радиотехника», 1965, № 1.