ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН У КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Ю. В. Гандель

Задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в бесконечно тонком идеально проводящем плоском экране посвящено очень большое число работ, библиография которых до 1960 года приведена в работе [1].

Были получены приближенные решения в области как длинных, так и коротких волн.

В настоящей работе доказывается, что рассматриваемая задача может быть сведена, и притом точно, к интегральному уравнению вида

$$g(t)+\frac{i}{\pi}\int_0^a\left\{\frac{\operatorname{sh}k(t+x)}{t+x}+\frac{\operatorname{sh}k(t-x)}{t-x}\right\}g(x)\,dx=f(x), \tag{1}$$

которое нужно решать два раза: при двух различных правых частях $f(x)$.

Впервые интегральное уравнение (1) появилось в статье Н. И. Ахиезера и А. Н. Ахиезера [2]*. В этой статье приведена одна система спаренных интегральных уравнений, решение которой сводится к решению уравнения (1), после чего указанные спаренные уравнения применяются для отыскания первого длинноволнового приближения в интересующей нас задаче дифракции электромагнитных волн. Построение дальнейших приближений методом, предложенным в [2], и исследование вопроса сходимости представляют большие трудности. Все эти трудности отпадают, если задача точно сведена к уравнениям вида (1).

Нужно заметить, что скалярная задача дифракции звуковых волн уже была точно сведена к уравнению (1) в статье Н. И. Ахиезера [4], посвященной спаренным интегральным уравнениям.

1. Постановка задачи

Экран расположен в плоскости xOy, отверстие в нем — круг радиуса a с центром в начале координат.

Пусть при отсутствии отверстия в экране поле в полупространстве $z<0$ имеет вид

$$\vec{E}_0e^{-i\omega t},\quad \vec{H}_0e^{-i\omega t},$$

где

$$\vec{E}_0=\{2i\sin kz,\,0,\,0\},\quad \vec{H}_0=\left\{0,\,2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos kz,\,0\right\} \tag{2}$$
$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

* Недавно уравнение (1) совсем из других соображений, но в связи с родственной задачей дифракции получено в работе [3].

Эта стоячая волна представляет собой сумму падающей и отраженной волн. В полупространстве $z > 0$ в этом случае поле отсутствует.

Наличие отверстия изменяет поле. Будем искать $\vec{E}$ и $\vec{H}$, полагая, что зависимость от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$, в виде

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}^- \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}^- \end{aligned}\right\} \quad \text{(в полупространстве } z < 0)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^+ \\ \vec{H} &= \vec{H}^+ \end{aligned}\right\} \quad \text{(в полупространстве } z > 0)$$

Поскольку экран предполагается идеально проводящим, то на нем обращается в нуль тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля. Связь между падающим полем и дифрагированным в отверстии мы получим из условия непрерывности полей. Таким образом, приходим к следующим краевым условиям [5]:

$$\left.\begin{aligned} &E_x^+(x, y, +0) = E_y^+(x, y, +0) = \\ &= H_z^+(x, y, +0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\text{при } r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} > a\right), \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &E_z^+(x, y, +0) = H_x^+(x, y, +0) = 0 \\ &H_y^+(x, y, +0) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \end{aligned}\right\} \quad (\text{при } r < a) \tag{4}$$

Поля $\vec{E}^+(x, y, z)$ и $\vec{H}^+(x, y, z)$ выражаются через магнитный вектор Герца:

$$\vec{E}^+ = i \operatorname{rot} \vec{\Pi}, \quad \vec{H}^+ = \frac{1}{\omega\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}. \tag{5}$$

Вектор $\vec{\Pi}$ ищется в виде [5]:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{M}(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y) - z\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}} \frac{d\alpha\, d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}}, \tag{6}$$

где $\vec{M} = \{M_x, M_y, 0\}$ подлежит определению.

Условие излучения требует, чтобы радикал $\gamma \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}$ был взят со знаком плюс, если $\lambda^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 \geqslant k^2$, а при $\lambda^2 < k^2$ его мнимая часть должна быть отрицательной.

Легко показать, что если в формуле (6) всюду перед радикалом γ поменять знак на противоположный, то она при той же вектор-функции $\vec{M}(\alpha, \beta)$ представит вектор Герца для полей $\vec{E}^-$ и $\vec{H}^-$.

Выразим две из компонент поля $\vec{E}^+$, $\vec{H}^+$ через вектор-функцию $\vec{M}$:

$$H_z^+(x, y, z) = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)} e^{-z\gamma}\, d\alpha\, d\beta; \tag{7}$$

$$E_y^+(x, y, z) = -\frac{i}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} M_x(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)} e^{-z\gamma}\, d\alpha\, d\beta, \tag{8}$$

где для краткости положено [2]

$$\Phi(\alpha, \beta) = \alpha M_x(\alpha, \beta) + \beta M_y(\alpha, \beta). \tag{7'}$$

Кроме того, введем обозначение [2]

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} M_x(\alpha, \beta). \tag{8'}$$

Прежде чем идти дальше, необходимо указать функциональный класс, которому должна принадлежать искомая вектор-функция $\vec{M}$. Это должно быть сделано на основании физических соображений. Мы их приведем несколько ниже, а здесь сформулируем результат. Функции $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Psi(\alpha, \beta)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha\, d\beta}{|\gamma|} < \infty, \tag{9}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\beta\Psi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha\, d\beta}{|\gamma|} < \infty. \tag{10}$$

Благодаря этому требованию правые части формул (7), (8) имеют пределы при $z \to +0$ и, учитывая условия (3), (4), мы приходим к выводу, что должны иметь место следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} d\alpha\, d\beta = 0 \qquad (11)\\ &\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, \beta)\, \beta e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta = 0 \qquad (12)\end{aligned}\right\} \quad (r > a)$$

Эти интегралы, подобно аналогичным дальнейшим, рассматриваются как результат предельного перехода $z \to +0$.

Дальнейшие уравнения для определения вектор-функции $\vec{M}(\alpha, \beta)$ получаются аналогично и имеют следующий вид:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha\Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma} = k^2 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} M_x e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma}; \tag{13}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta\Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma} = k^2 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} M_y e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma} - 4\pi^2 k; \tag{14}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, \beta)\,(\alpha^2 + \beta^2)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma} =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha\Phi(\alpha, \beta)}{\beta} e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma} \qquad (\text{при } r < a) \tag{15}$$

Сведением системы спаренных интегральных уравнений (11, 12), (13, 14, 15) к уравнениям Фредгольма мы займемся в следующих параграфах.

Обратимся теперь к обоснованию условий (9), (10), а именно, покажем, что эти условия выражают конечность энергии. Следовательно, они эквивалентны обычно вводимым условиям Майкснера [6]. В связи с этим заметим, что из (7), (8) в силу равенства Парсеваля следуют соотношения

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |H_z^+(x, y, z)|^2 dx\, dy = \frac{1}{4\pi^2\omega^2\mu^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 e^{-z(\gamma+\bar{\gamma})}\, d\alpha\, d\beta;$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |E_z^+(x, y, z)|^2 dx\, dy = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |M_x(\alpha, \beta)|^2 e^{-z(\gamma+\bar{\gamma})}\, d\alpha\, d\beta.$$

Отсюда, интегрируя по z от 0 до ∞ и замечая, что $\gamma+\bar{\gamma}=0$ при $\alpha^2+\beta^2<k^2$, получаем

$$\int\limits_0^{\infty} dz \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |H_z^+(x, y, z)|^2 dx\, dy = \frac{k}{4\pi^2\omega^2\mu^2}\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<k^2} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha\, d\beta + \\ + \frac{1}{8\pi^2\omega^2\mu^2}\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2>k^2} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, d\alpha\, d\beta;$$

$$\int\limits_0^{\infty} dz \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |E_z^+(x, y, z)|^2 dx\, dy = \frac{k}{4\pi^2}\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<k^2} |M_x(\alpha, \beta)|^2 d\alpha\, d\beta + \\ + \frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2>k^2} |M_x(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha\, d\beta}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}.$$

Вспоминая выражение для энергии электромагнитного поля, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Заметим теперь, что в [2] вместо наших условий (9), (10) приняты другие условия, заменяющие требования Майкснера, а именно:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^p d\alpha\, d\beta < \infty, \tag{9'}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\beta\Psi(\alpha, \beta)|^p d\alpha\, d\beta < \infty, \tag{10'}$$

где число $p>2$ сколь угодно близко к 2.

Покажем теперь, что из этих последних условий вытекают условия (9), (10).

Пусть, например, выполнено условие (9′). Чтобы получить (9), докажем, что при достаточно большом R

$$\iint\limits_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha\, d\beta}{\lambda} < \infty,$$

где область (R) есть внешность круга радиуса R с центром $\alpha=\beta=0$.

Воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\iint\limits_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha\, d\beta}{\lambda} \leqslant \left[\iint\limits_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^p d\alpha\, d\beta\right]^{\frac{2}{p}} \times \\ \times \left[\iint\limits_{R} \frac{d\alpha\, d\beta}{\lambda^{\frac{p}{p-2}}}\right]^{\frac{p-2}{p}}.$$

Если только $2 < p < 4$, то из справедливости (9′) при любом сколь угодно близком к 2, но большем его p неравенство (9) также будет справедливо.

2. Сведение задачи к решению системы спаренных интегральных уравнений специального вида

Примем как известный факт, что рассматриваемая нами краевая задача имеет единственное решение при условиях (9), (10), равносильных условиям Майкснера.

Наша задача состоит в нахождении решения, точнее говоря, в построении уравнений, удобных для решения.

Воспользуемся единственностью решения следующим образом: заменим во всех уравнениях (11, 12), (13—15) x на $-x$, а затем заменим переменную интегрирования α на $-\alpha$. Из рассмотрения получающихся таким образом уравнений благодаря единственности решения можно заключить, что

$$\Phi(-\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta), \quad \Psi(-\alpha, \beta) = -\Psi(\alpha, \beta).$$

Аналогично получим равенства

$$\Phi(\alpha, -\beta) = -\Phi(\alpha, \beta), \quad \Psi(\alpha, -\beta) = \Psi(\alpha, \beta).$$

Этим соотношениям можно удовлетворить, полагая

$$\Phi(\alpha, \beta) = \beta E(\lambda), \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha D(\lambda).$$

Сделав предположение, покажем, что оно приведет нас к решению, после чего остается снова воспользоваться единственностью.

Мы можем положить

$$E(\lambda) = C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda),$$

так что, благодаря соотношениям (7′), (8′),

$$M_x = \alpha\beta D(\lambda), \quad M_y = C(\lambda) + \beta^2 D(\lambda) \tag{16}$$

$$\Phi(\alpha, \beta) = \beta[C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)], \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha D(\lambda). \tag{17}$$

После подстановки выражений (16), (17) в систему уравнений (11, 12), (13—15) приходим к следующим уравнениям:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = 0 \quad (r < a); \tag{18}$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha\beta \left[\frac{C(\lambda)}{\gamma} + \gamma D(\lambda)\right] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r < a); \tag{19}$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha\beta D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a); \tag{20}$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \beta^2 \gamma D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\gamma} C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta - 4\pi^2 k \quad (r < a); \tag{21}$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a), \tag{22}$$

которые после несложных преобразований приводятся к виду

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha C(\lambda)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = 0 \quad (r < a); \tag{23}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha\beta\gamma D(\lambda)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta = 0 \quad (r < a); \tag{24}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha\beta D(\lambda)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a); \tag{25}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma\,[C(\lambda) + \beta^2 D(\lambda)]\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta = -4\pi^2 k \quad (r < a); \tag{26}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta\,[C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)]\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a). \tag{27}$$

Вводя в плоскости α, β полярные координаты λ, ψ, мы сможем во всех двойных интегралах выполнить интегрирование по полярному углу, после чего останутся простые интегралы.

Уравнения (24), (25) непосредственно приводятся к виду

$$\int\limits_0^\infty D(\lambda)\, \lambda^3 J_2(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = A J_2(kr) \quad (r < a); \tag{28}$$

$$\int\limits_0^\infty D(\lambda)\, \lambda^3 J_2(\lambda r)\, d\lambda = 0 \quad (r > a). \tag{29}$$

С помощью (25) приведем (27) к виду

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta\,[C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)]\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a), \tag{30}$$

откуда

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2 [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)]\, J_1(\lambda r)\, d\lambda = 0 \quad (r > a). \tag{31}$$

После ряда преобразований из (27) и (23) получим

$$\int\limits_0^\infty \lambda \left[C(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} D(\lambda)\right] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = \frac{2\pi}{k} + \frac{A}{2} J_0(kr) \quad (r < a); \tag{32}$$

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2 C(\lambda)\, J_1(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = 0 \quad (r < a). \tag{33}$$

Можно показать, что (32) является следствием остальных уравнений при условии, что

$$\int\limits_0^\infty \lambda \left[C(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} D(\lambda)\right] \frac{d\lambda}{\gamma} = \frac{2\pi}{k} + \frac{A}{2}. \tag{34}$$

Таким образом, мы получили два спаренных интегральных уравнения для определения функций $D(\lambda)$ и $C(\lambda)+\lambda^2 D(\lambda)$:

$$
\text{(I)}\ \begin{cases}
\int\limits_0^\infty D(\lambda)\,\lambda^3 J_2(\lambda r)\,\dfrac{d\lambda}{\gamma} = AJ_2(kr) & (r<a);\\
\int\limits_0^\infty D(\lambda)\,\lambda^3 J_2(\lambda r)\,d\lambda = 0 & (r>a);
\end{cases}
$$

$$
\text{(II)}\ \begin{cases}
\int\limits_0^\infty \lambda^2 [C(\lambda)+\lambda^2 D(\lambda)]\,J_1(\lambda r)\,\dfrac{d\lambda}{\gamma} = AkJ_1(kr) & (r<a);\\
\int\limits_0^\infty \lambda^2 [C(\lambda)+\lambda^2 D(\lambda)]\,J_1(\lambda r)\,d\lambda = 0 & (r>a).
\end{cases}
$$

Константу A, которая появилась при интегрировании, можно найти из условия (34). Остается преобразовать неравенства, выражающие условие Майкснера. Это легко приводит к следующему результату:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_N^\infty |C(\lambda)+\lambda^2 D(\lambda)|^2 \frac{\lambda^3 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} < \infty,\\
\int\limits_N^\infty |\lambda^2 D(\lambda)|^2 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} < \infty.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Эти условия будут удовлетворены, если, как отмечалось выше, при $p>2$

$$
\int\limits_0^\infty |\lambda[C(\lambda)+\lambda^2 D(\lambda)]|^p \lambda d\lambda < \infty,
$$

$$
\int\limits_0^\infty |\lambda^2 D(\lambda)|^p \lambda d\lambda < \infty.
$$

Однако мы примем условия (35).

3. Интегральные уравнения Фредгольма для рассматриваемой задачи

Спаренные уравнения (I) и (II) могут быть сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с вещественным симметричным ядром и чисто мнимым параметром. Этот вопрос подробно рассмотрен в статье [4], где изучаются также и более общие спаренные уравнения. Для удобства мы приведем здесь формулировку* нужной нам теоремы из статей [2] и [4].

* Здесь внесено лишь одно изменение, а именно: в статье [2] вместо условия (30) требуется, чтобы при любом

$$
\int\limits_0^\infty |\varphi(\lambda)\lambda^m|^p \lambda d\lambda < \infty.
$$

Даны спаренные уравнения

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} d\lambda = 0 \quad (r > a);$$

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} \frac{d\lambda}{\gamma} = F(r) r^m \quad (0 \leqslant r < a),$$

где $m(\geqslant 0)$ целое число, γ определено, как выше, $F(r)$ $(0 \leqslant r \leqslant a)$ — гладкая функция.

Ищется решение $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющее условию

$$\int_0^\infty |\varphi(\lambda)|^2 \lambda^{2m} d\lambda < \infty. \tag{36}$$

Это решение единственно и имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g(t) \cos(t\gamma)\, dt,$$

где $g(t)$ есть решение уравнения

$$g(t) + \frac{i}{\pi} \int_0^a \left[\frac{\operatorname{sh} k(t+x)}{t+x} + \frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x}\right] g(x)\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{ch}(k\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr,$$

и $f(r)$ находится при помощи квадратур по формуле

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^m f(r) = (-1)^m F(r),$$

а произвольные постоянные в составе $f(r)$ однозначно определяются из условия, чтобы функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяла соотношению (36).

Для пояснения заметим, что неравенство (36) при заданном m требует определенной гладкости функции $g(t)$ и удовлетворения некоторым условиям ею и ее производными до определенного порядка на концах интервала $[0, a]$. Для этого и нужны произвольные постоянные в составе $f(r)$. Если $m = 0$, то, конечно, никаких постоянных не будет, но и условие (36) будет выполнено автоматически.

При $m = 1$ условие (36) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$g(a) = 0.$$

Ниже мы на этом еще остановимся.

Для системы (I) функция $f(r)$, входящая в правую часть интегрального уравнения, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 f(r) = A\frac{J_2(kr)}{r^2},$$

которое дает для $f(r)$ следующее выражение:

$$f(r) = A\left[\frac{J_0(kr)}{k} + B_1 r^2 + B_2\right];$$

возникшие здесь постоянные интегрирования B_1 и B_2 должны быть найдены из условия

$$\int_0^\infty |D(\lambda)\lambda^2|^2 d\lambda < \infty.$$

Как это сделать, мы укажем ниже.

Для вычисления правой части интегрального уравнения воспользуемся вторым определенным интегралом Сонина [7]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(z\sin\theta)\, J_\nu(\zeta\cos\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{\nu+1}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{z^\mu\zeta^\nu J_{\mu+\nu+1}(\sqrt{z^2+\zeta^2})}{(\sqrt{z^2+\zeta^2})^{\mu+\nu+1}} \quad (\mathrm{Re}\mu > -1,\ \mathrm{Re}\nu > -1).$$

Полагая $\mu = 0$, $\nu = -1/2$, $\zeta = ikt$, получаем

$$\int_0^t rJ_0\left(\frac{z}{t}\, r\right)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr = t\ \frac{\sin\sqrt{z^2-(kt)^2}}{\sqrt{z^2-(kt)^2}}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $z \to kt$, будем иметь

$$\int_0^t rJ_0(kr)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr = t.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\int_0^t r\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr = \frac{\operatorname{sh} kt}{k};$$

$$\int_0^t r^3\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr = \frac{2}{k^2}\, t\operatorname{ch} kt - \frac{2}{k^3}\operatorname{sh} kt.$$

Окончательно получаем следующий результат. Решение системы (I) имеет вид

$$D(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a g_1(t)\cos(t\gamma)\, dt,$$

где $g_1(t)$ подлежит определению из интегрального уравнения с вещественным симметричным ядром

$$g_1(t) + \frac{i}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x}\, g_1(x)\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{A}{k}\,[1 + B_1\operatorname{ch} kt + 2B_2 t\operatorname{sh} kt].$$

Аналогично для системы (II) будем иметь

$$C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a g_2(\lambda)\cos(t\gamma)\, dt,$$

где $g_2(t)$ подлежит определению из уравнения

$$g_2(t) + \frac{i}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x} g_2(x)\,dx = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,kA\,[1 + B\operatorname{ch} kt],$$

а постоянная B может быть найдена из условия

$$\int_0^\infty |[C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)]\,\lambda|^2\,d\lambda < \infty. \qquad (37)$$

Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda) = \frac{\sin\gamma a}{\gamma} g_2(a) - \int_0^a g_2'(t)\frac{\sin\gamma t}{\gamma}\,dt,$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ и для выполнения (37) достаточно положить $g_2(a) = 0$. Это условие и даст возможность вычислить B.

Аналогично находим, что для определения постоянных B_1 и B_2 нужно потребовать $g_1(a) = g_1'(a) = 0$.

Подробным расчетом дифрагированного поля на основе изложенного здесь метода мы предполагаем заняться в следующей статье.

В заключение автор выражает благодарность Н. И. Ахиезеру за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Eggimann. Higher — Order Evaluation of Electromagnetic Diffraction by Circular Disks. IRE trans. on microwave theory and techn., September (1961).
2. Н. И. Ахиезер и А. Н. Ахиезер. К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. ДАН СССР, 109 (1956).
3. A. E. Heins. Function — theoretic Aspects of Diffraction Theory. Electromagnetic Waves, Madison, 1962.
4. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. Зап. матем. отд. физ.-матем. ф-та ХГУ и Харьк. матем. об-ва, т. XXV (1957).
5. K. Westpfahl. Zur strengen Theorie der Beugung electromagnetischer Wellen an ebenen Schirmen allgemeiner Gestalt. Zs. Phys., 141, 3 (1955).
6. I. Meixner. Die Kantenbedingungen in der Theorie der Beugung electromagnetischer Wellen on vollkommen beitender ebenen Schirmen. Ann. Phys. B. 6, s. 2 (1949).
7. Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа, ч. II, М., 1963.