К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ НАД СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

Э. И. Черняков, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов

В последнее время вызывает интерес излучение электромагнитных волн, обусловленное движением электронного потока или отдельного электрона над периодической структурой. Механизм такого излучения наглядно объясняется с помощью модели «мигающего» диполя [1]—[3], которая остается пригодной и для рассматриваемого случая дифракционной решетки, лежащей на границе полубесконечного диэлектрика с произвольным значением проницаемости ε. Такая задача представляет определенный интерес, поскольку наличие диэлектрика влияет на амплитуду и направление излучения движущегося заряда или системы зарядов.

Впервые излучение заряда, движущегося над дифракционной решеткой, экспериментально наблюдалось Смитом и Парселлом в 1953 г. [2]. Оценка этого эффекта как источника светового и инфракрасного излучения содержится в работе [3].

Теоретическое рассмотрение излучения, обусловленного движением плоского монохроматического электронного потока над дифракционной решеткой, впервые проведено в работе [4].

В настоящей работе приводится строгое математическое решение задачи об излучении плоского монохроматического электронного потока, движущегося над бесконечно протяженной ленточной решеткой, помещенной на границе раздела вакуум-диэлектрик.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электронный пучок с переменной составляющей комплексной амплитуды

$$\rho = \rho_0 \delta(z) e^{i(ky - \omega t)}, \tag{1}$$

который движется в вакууме над металлической решеткой вдоль оси Oy с постоянной скоростью $\vec{v} = \vec{j}\beta c$; решетка расположена на границе диэлектрика с проницаемостью ε в плоскости $z = -a$. Здесь введены следующие обозначения:

ρ_0 — амплитуда модуляции пучка,
ω — частота модуляции,
c — скорость света,
$k = \frac{\omega}{v}$;
$\delta(z)$ — дельта-функция Дирака;
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты прямоугольной системы координат.

Период решетки l и ширина лент d; образующие лент параллельны оси Ox.

Для удобства рассмотрения обозначим полупространство над решеткой ($\varepsilon = 1$) через область I, а полупространство под решеткой ($\varepsilon \neq 1$) через область II.

Векторный и скалярный потенциалы для области находятся из решения уравнений

$$\Box \vec{A}_{\rm I} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}, \tag{2}$$

$$\Box \Phi_{\rm I} = -4\pi\rho, \tag{3}$$

где ток $\vec{J} = \vec{j}\rho\beta c$.

Из (2) и (3) следует простая связь между их частными решениями:

$$a_{\rm I} = \vec{j}\beta\varphi_{\rm I}. \tag{4}$$

Следовательно, для области I задача сводится к отысканию общего решения уравнений (2), (3) и частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\Box \varphi_{\rm I} = -4\pi\rho_0\delta(z)\,e^{i(ky-\omega t)}. \tag{5}$$

Разделив на оператор Даламбера, получим решение в виде, аналогичном приведенному в [5]:

$$\varphi_{\rm I} = \frac{2\pi\rho_0}{q}e^{-q\,|z|}e^{i(ky-\omega t)}, \tag{6}$$

где $q = k\theta = k\sqrt{1-\beta^2}$.

Используя свойство градиентной инвариантности потенциала, общее решение уравнений (2), (3) будем искать в виде

$$\vec{a}_{\rm I}^{\,0} \neq 0;\ \varphi_{\rm I}^{0} = 0. \tag{7}$$

Ввиду однородности структуры пучок—решетка вдоль оси и периодичности вдоль оси Oy вектор $\vec{a}_{\rm I}^{\,0}$ должен иметь только y- и z-компоненты, которые целесообразно представить в виде ряда Фурье:

$$\vec{a}_{\rm I}^{\,0} = \vec{j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ny}e^{iq_n(z+a)}e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y} + $$
$$+\vec{k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{iq_n(z+a)}e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}. \tag{8}$$

Постоянная распространения $q_n = k\theta_n = k\sqrt{\beta^2-\left(1+n\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2}$ находится из подчинения (8) однородному уравнению (2). Здесь и дальше подразумевается зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$.

Связь между неизвестными коэффициентами определяется из условия Лоренца:

$$a_{ny} = -a_n\frac{\theta_n}{1+n\frac{\beta}{\varkappa}} = -a_n\tau_n,$$

где $\varkappa = \frac{l}{\lambda}$; $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

Во второй области ($\varepsilon \neq 1$) векторный и скалярный потенциалы подчиняются однородным уравнениям

$$\Box_\varepsilon \vec{A}_{\rm II} = 0, \tag{9}$$

$$\Box_\varepsilon \Phi_{\rm II} = 0. \tag{10}$$

Решение их находится в следующей форме:

$$\Phi_{II} = 0; \tag{11}$$

$$\vec{A}_{II} = \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{ny} e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y} + \\ + \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}. \tag{12}$$

Подчинив $\vec{A}_{II}$ однородному уравнению (9), найдем

$$q_{2n} = k\theta_{2n} = k\sqrt{\varepsilon\beta^2 - \left(1 + n\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2}.$$

Из условия Лоренца легко получим

$$b_{ny} = b_n \frac{\theta_{2n}}{1 + n\frac{\beta}{\varkappa}} = b_n \tau_{2n}.$$

Электромагнитное поле для каждой области определится через векторный и скалярный потенциалы — $\vec{A}_I = \vec{a}_I + \vec{a}_I^0$; $\Phi_I = \varphi_I + \varphi_I^0$; $\vec{A}_{II}$; Φ_{II}:

$$\vec{E}_I = \left(-i\theta\vec{j} + \frac{d|z|}{dz}\vec{k}\right) F e^{-q|z|} e^{iky} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\tau_n \vec{j} + \vec{k}) A_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}; \tag{13}$$

$$\vec{H}_I = \vec{e}\left\{\beta F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\beta}{1 + n\frac{\beta}{\varkappa}} e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}\right\}; \tag{14}$$

$$\vec{E}_{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau_{2n}\vec{j} + \vec{k}) B_n e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}; \tag{15}$$

$$\vec{H}_{II} = \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{\varepsilon\beta}{1 + n\frac{\beta}{\varkappa}} e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}, \tag{16}$$

где $F = 2\pi\rho_0$, $A_n = ik\beta a_n$; $B_n = ik\beta b_n$.

Излучение возможно только в том случае, когда величины q_n и q_{2n} вещественны, что имеет место при

$$\beta^2 > \left(1 + n\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon\beta^2 > \left(1 + n\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2. \tag{17}$$

Когда выполняются оба условия, излучение существует в обеих областях. Соответствующим выбором соотношения между диэлектрической проницаемостью среды ε, скоростью пучка β и параметром $\varkappa$ можно добиться существования излучения только в области II. Заметим, что в отличие от случая решетки в свободном пространстве [4], где условие излучения выполняется только для $n < 0$, в рассматриваемом случае излучение возможно и при $n > 0$. Когда $n = 0$, наблюдается эффект Вавилова — Черенкова.

Из анализа поля обнаруживается простая связь между длиной волны излучения и направлением ее распространения:

$$\cos\gamma_n = \frac{1}{\beta} + n\frac{\lambda}{l}; \tag{18}$$

$$\cos\gamma_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\beta} + n\frac{\lambda}{l}\right), \tag{19}$$

где γ_n — угол между плоскостью решетки и направлением излучения, отсчитываемый в положительном направлении, а γ_{2n} — в отрицательном.

Для количественного анализа излучения необходимо определить коэффициенты Фурье поля A_n и B_n, подчинив уравнения (13) — (16) граничным условиям на одном из периодов решетки, например, $-\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$.

Потребуем выполнения точных граничных условий: равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на металле и непрерывности всего электромагнитного поля на щелях:

$$z = -a \quad E_{It} = E_{IIt} = 0 \quad \text{(на металле)}; \tag{20}$$

$$E_{It} = E_{IIt};\ H_{It} = H_{IIt} \quad \text{(на щели)}. \tag{21}$$

Подставляя выражения для поля (13) — (16) в (20) — (21), получим равенства для коэффициентов A_n, B_n:

$$F_a + A_0 = -B_0\frac{\theta_{2o}}{\theta_o};\quad A_n = -B_n\frac{\theta_{2n}}{\theta_n}, \tag{22}$$

где $F_a = Fe^{-qa}$; $\theta_{2o} = \sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1}$; $\theta_o = \sqrt{\beta^2 - 1}$,
и пару уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \tau_n e^{i\left(k + 2\pi\frac{n}{l}\right)y} = -i\theta F_a e^{iky};\quad |y| < \frac{d}{2}; \tag{23}$$

$$\left[A_0\left(1 + \varepsilon\frac{\theta_o}{\theta_{2o}}\right) - F_a\left(1 - \varepsilon\frac{\theta_o}{\theta_{2o}}\right)\right]e^{iky} + \sum_{n\neq 0}\frac{A_n}{1 + n\frac{\beta}{\chi}}\left(1 + \varepsilon\frac{\theta_n}{\theta_{2n}}\right)e^{i\left(k + 2\pi\frac{n}{l}\right)y} = 0; \tag{24}$$

$$\frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}$$

Вводя новые коэффициенты

$$2C_0 = A_0\left(1 + \varepsilon\frac{\theta_o}{\theta_{2o}}\right) - F_a\left(1 - \varepsilon\frac{\theta_o}{\theta_{2o}}\right);$$

$$2C_n = A_n\left(1 + \varepsilon\frac{\theta_n}{\theta_{2n}}\right)$$

и сделав соответствующие преобразования в (23) и (24), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\frac{1}{1 + n\frac{\beta}{\chi}}e^{i\left(k + 2\pi\frac{n}{l}\right)y} = 0; \tag{25}$$

$$\frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\tau_n}{1+\varepsilon\frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y} = -\frac{i\theta F_a}{1+\varepsilon\frac{\theta_0}{\theta_{2o}}} e^{iky}, \tag{26}$$

$$|y| < \frac{d}{2}$$

2. Решение граничной задачи

Продифференцировав (25) по y и проделав некоторые преобразования с (26), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n\frac{y}{l}} = 0; \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}; \tag{27}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\left|1+n\frac{\beta}{\varkappa}\right|}{1+n\frac{\beta}{\varkappa}} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\left(1+n\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2}-1}\, e^{i2\pi n\frac{y}{l}} = -i\mathscr{E}, \tag{28}$$

$$|y| < \frac{d}{2},$$

где

$$\mathscr{E} = \theta\mathscr{E}_0 = \theta\frac{F_a(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\frac{\theta_0}{\theta_{2o}}} \quad \text{и} \quad 1+n\frac{\beta}{\varkappa} \neq 0.$$

К равенствам (27) — (28) добавим еще одно, получающееся после подстановки в (25) конкретного значения y, например, $y=\frac{l}{2}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(-1)^n}{1+n\frac{\beta}{\varkappa}} = 0. \tag{29}$$

Обозначим

$$g_n = \frac{\left(1+n\frac{\beta}{\varkappa}\right)}{1+n\frac{\beta}{\varkappa}} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\left(1+n\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2}-1};$$

$$\chi_n = 1 + i\frac{|n|}{n} g_n; \quad \delta = \pi\frac{d}{l}; \quad \psi = 2\pi\frac{y}{l}. \tag{30}$$

Заметим, что $\chi_n \to 0$ при $|n| \to \infty$ и

$$g_n = i\frac{|n|}{n}(1-\chi_n). \tag{31}$$

Уравнения (27) — (28) с учетом (30) — (31) примут вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\psi} = 0; \quad \delta < |\psi| < \pi; \tag{32}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{|n|}{n}(1-\chi_n) e^{in\psi} = -\mathscr{E}; \quad |\psi| < \delta. \tag{33}$$

Эта пара уравнений образует задачу Римана — Гильберта, подробности решения которой приведены в работе [7]. Окончательное решение уравнений (32), (33) совместно с (29) запишем в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье и неизвестной промежуточной константы C

$$\left.\begin{aligned} &2CR_a + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{|n|}{n} \chi_n V_a^n = \mathscr{E} V_a^0 \\ &2CR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(\frac{|n|}{n} \chi_n V_m^n - \delta_{mn} \right) = \mathscr{E} V_m^0 \\ &\qquad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{34}$$

Величины R_m, V_m^n, R_a и V_a^n вычислены в работах [6] и [7].

Система (34) допускает получение решения методом редукции. При всех достижимых значениях диэлектрической проницаемости ε и относительной скорости β можно найти такое N, что $\chi_n \to 0$ для всех $|n| > N$ и, следовательно, в (34) слагаемыми с $|n| > N$ можно пренебречь. Это выполняется при $\beta \sqrt{\varepsilon} \ll \left| 1 + n \frac{\beta}{\varkappa} \right|$.

Следовательно, бесконечную систему уравнений (34) можно свести к ограниченной. Для отыскания численных значений необходимо использовать ЭВМ.

3. Энергетические характеристики излучения

Определим среднее значение вектора Умова — Пойнтинга $\vec{S}$ на единичной площадке произвольной плоскости $z = h$; для этого достаточно найти его среднюю величину на участке

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \quad -\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}:$$

$$\vec{S}_{\mathrm{I}} = \sum_{n=-1}^{-N} \left(\vec{j} \frac{1}{\eta + n} + \vec{k} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - (\eta + n)^2}}{(\eta + n)^2} \right) \frac{\sqrt{\varepsilon\varkappa^2 - (\eta + n)^2}}{\left(\sqrt{\varepsilon\varkappa^2 - (\eta + n)^2} + \varepsilon \sqrt{\varkappa^2 - (\eta + n)^2}\right)^2} \times$$
$$\times \frac{\varkappa c}{2\pi} |C_n|^2 \ \text{при} \ h > -a; \tag{35}$$

$$\vec{S}_{\mathrm{II}} = \left(\vec{j} \frac{1}{\eta} - \vec{k} \frac{\sqrt{\varepsilon\varkappa^2 - \eta^2}}{\eta^2} \right) \frac{\varkappa^2 - \eta^2}{\left(\sqrt{\varepsilon\varkappa^2 - \eta^2} + \varepsilon \sqrt{\varkappa^2 - \eta^2}\right)^2} - \frac{\varepsilon\varkappa c}{2\pi} |C_0 + F_a|^2 +$$
$$+ \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} \left(\vec{j} \frac{1}{\eta + n} - \vec{k} \frac{\sqrt{\varepsilon\varkappa^2 - (\eta + n)^2}}{(\eta + n)^2} \right) \frac{\varkappa^2 - (\eta + n)^2}{\left(\sqrt{\varepsilon\varkappa^2 - (\eta + n)^2} + \varepsilon \sqrt{\varkappa^2 - (\eta + n)^2}\right)^2} \times$$
$$\times \frac{\varepsilon\varkappa c}{2\pi} |C_n|^2 \ \text{при} \ h < -a, \tag{36}$$

где $\eta = \frac{\varkappa}{\beta}$ и индекс n принимает все значения, для которых выполняются условия излучения.

Таким образом, монохроматический электронный поток при движении над периодической структурой, расположенной на плоской границе раздела вакуум — диэлектрическая среда, возбуждает электромагнитные колебания (13) — (16), частота которых совпадает с частотой модуляции пучка, а направление излучения образует дискретный спектр, аналогичный дифракционному спектру. Из анализа уравнений (18) — (19) и (35) — (36) следует, что излучение является несимметричным относительно границы раздела и по направлению и по амплитуде, в отличие от излучения пучка, движущегося над решеткой в свободном пространстве [4]. Необходимо отметить принципиальную возможность излучения на пространственных гармониках с индексом $n \geqslant 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Джелли. Черенковское излучение, ИЛ, 1960.
2. S. J. Smith, E. M. Purcell. Phys. Rev., 92, № 4, 1069 (1953).
3. K. Ishiguro, T. Tako. International Journal Optica Acta, 8, 1 (1961).
4. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов. «Радиотехника и электроника», 10, 7, 1965.
5. M. Danos. Journal Appl. Phys., 26, № 1 (1955).
6. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962).
7. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, № 6 (1963).