

# ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВОЙНОЙ СКРЕЩЕННОЙ РЕШЕТКЕ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ

В. В. Щербак

1. На рис. 1 изображена периодическая структура, состоящая из двух ленточных решеток, расположенных параллельно, на расстоянии  $r$  друг от друга. Направления щелей верхней и нижней решеток взаимно перпендикулярны. Ленты предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими.

Пусть на эту систему сверху ( $z > 0$ ) нормально к решеткам падает плоская монохроматическая волна

$$E_{\text{пад}}, \vec{H}_{\text{пад}} \sim e^{-ikz}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

и нам нужно найти полное поле дифракции.

Из соображений симметрии следует, что это поле периодически с периодом  $a$  в направлении  $x$  и с периодом  $b$  в направлении  $y$  и поэтому может быть разложено в двойной ряд Фурье:

$$E, H \sim \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} C_{n, m}(z) e^{ih_n y + ig_m x}; \quad h_n = \frac{2\pi}{b} n; \quad g_m = \frac{2\pi}{a} m; \quad (2)$$

$C_{n, m}(z)$  находим из решения волнового уравнения. При этом учитываем, что в верхнем полупространстве ( $z > 0$ ) искомое поле является наложением падающей волны и суммы отраженных волн, распространяющихся (или затухающих) в направлении  $-z$ , а в нижнем полупространстве ( $z < -r$ ) имеем прошедшие волны, распространяющиеся или затухающие в направлении  $z$ .

Тогда  $x$ -е составляющие полей в трех областях запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_x^1 &= A e^{-ikz} + \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} a_{nm} e^{i\gamma_{nm} z + ih_n y + ig_m x}; \\ E_x^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + d_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + ig_m x}; \\ E_x^3 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} b_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + ig_m x}; \\ H_x^1 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} a'_{nm} e^{i\gamma_{nm} z + ih_n y + ig_m x} + B e^{-ikz}; \\ H_x^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c'_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + d'_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + ig_m x}; \end{aligned} \quad (3)$$

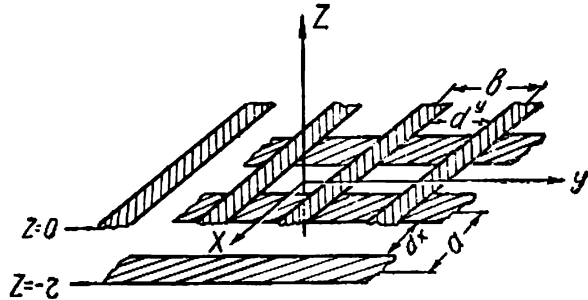


Рис. 1. Периодическая структура из двух ленточных решеток.

$$H_x^2 = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} b'_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + i g_m x}. \quad (3)$$

Здесь  $\gamma_{nm} = \sqrt{k^2 - h_n^2 - g_m^2}$ ,  $A$  и  $B$  — амплитуды соответственно  $E_x$  и  $H_x$  составляющей падающей волны.

Остальные компоненты поля выражаются через  $E_x$  и  $H_x$  из уравнений Максвелла. Мы выпишем только выражения для  $y$ -х составляющих полей во второй ( $0 > z > -r$ ) и третьей ( $z < -r$ ) области:

$$\begin{aligned} H_y^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (C_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + D_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + i g_m x}; \\ H_y^3 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} B_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + i g_m x}; \\ E_y^2 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (C'_{nm} e^{-i\gamma_{nm} z} + D'_{nm} e^{i\gamma_{nm}(z+r)}) e^{ih_n y + i g_m x}; \\ E_y^3 &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} B'_{nm} e^{-i\gamma_{nm}(z+r) + ih_n y + i g_m x}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} C_{nm} &= -\frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} c_{nm} - \frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} c'_{nm}; & C'_{nm} &= -\frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} c_{nm} + \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} c'_{nm}; \\ D_{nm} &= \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} d_{nm} - \frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} d'_{nm}; & D'_{nm} &= -\frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} d_{nm} - \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} d'_{nm}; \\ B_{nm} &= -\frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} b_{nm} - \frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} b'_{nm}; & B'_{nm} &= -\frac{h_n g_m}{k^2 - g_m^2} b_{nm} + \frac{k\gamma_{nm}}{k^2 - g_m^2} b'_{nm}. \end{aligned} \quad (5)$$

Амплитуды полей связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A\delta_n \delta_m + a_{nm} &= c_{nm} + e_{nm} d_{nm}; & -B\delta_n \delta_m + a'_{nm} &= -c'_{nm} + e_{nm} d'_{nm}; \\ b_{nm} &= c_{nm} e_{nm} + d_{nm}; & b'_{nm} &= c'_{nm} e_{nm} - d'_{nm} e_{nm} = e^{i\gamma_{nm}}; \end{aligned} \quad (6)$$

вытекающими из непрерывности составляющих  $E_x$  и  $E_y$  при  $z = 0$  и при  $z = -r$ .

Кроме того, имеем граничные условия, выполняющиеся на лентах и щелях решеток:

$$\begin{aligned} E_x^2 &= 0, & \frac{d^y}{2} < |y| < \frac{b}{2}; & & H_x^2 = H_x^1, & \frac{b-d^y}{2} < \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b}{2}; \\ \frac{\partial E_x^2}{\partial z} &= \frac{\partial E_x^1}{\partial z}, & |y| < \frac{d^y}{2}; & & \frac{\partial H_x^2}{\partial z} &= 0, & \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b-d^y}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

при  $z = 0$  и

$$\begin{aligned} E_y^2 &= 0, & \frac{d^x}{2} < |x| < \frac{a}{2}; & & H_y^2 = H_y^3, & \frac{a-d^x}{2} < \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a}{2} \\ \frac{\partial E_y^2}{\partial z} &= \frac{\partial E_y^3}{\partial z}, & |x| < \frac{d^x}{2}; & & \frac{\partial H_y^2}{\partial z} &= 0, & \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a-d^x}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

при  $z = -r$ .

Удовлетворяя этим граничным условиям, получим уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c_{nm} + e_{nm}d_{nm}) e^{ih_n y + ig_m x} = 0, \quad \frac{d^y}{2} < |y| < \frac{b}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = A; \quad |y| < \frac{d^y}{2} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c'_{nm} e^{ih_n y + ig_m x} = B, \quad \frac{b-d^y}{2} < \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (c'_{nm} - e_{nm}d'_{nm}) \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = 0; \quad \left| y - \frac{b}{2} \right| < \frac{b-d^y}{2} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} D_{nm} e^{ih_n y + ig_m x} = 0, \quad \frac{a-d^x}{2} < \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (D_{nm} - e_{nm}C_{nm}) \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = 0; \quad \left| x - \frac{a}{2} \right| < \frac{a-d^x}{2} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} (D'_{nm} + e_{nm}C'_{nm}) e^{ih_n y + ig_m x} = 0, \quad \frac{d^x}{2} < |x| < \frac{a}{2} \\ \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} D'_{nm} \frac{\gamma_{nm}}{k} e^{ih_n y + ig_m x} = 0. \quad |x| < \frac{d^x}{2} \end{array} \right. \quad (12)$$

Рассмотрим первую пару этих уравнений. Так как (9) выполняются при любых  $x$ , то приравняв нулю коэффициенты при  $e^{ig_m x}$ , получим бесконечное количество пар более простых уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{np} + d_{np}e_{np}) e^{ih_n y} = 0, \quad \frac{d^y}{2} < |y| < \frac{b}{2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{np} \frac{\gamma_{n,p}}{\gamma_{n,0}} e^{ih_n y} = A\delta_p, \quad |y| < \frac{d^y}{2} \end{array} \right. \quad (13)$$

каждую из которых решаем при помощи метода задачи Римана—Гильберта [1]. Подробно на решении уравнений (13) мы останавливаться не будем, поскольку уравнения, сходные с (13), исследованы в известных работах по дифракции. Заметим только, что при этом для каждой  $p$ -й пары уравнений (13) получается бесконечная система алгебраических уравнений (относительно  $e_{np}, d_{np}$ ). Всего, таким образом, имеем бесконечное количество таких систем. Вместе они образуют бесконечную двумерную систему уравнений

$$\begin{aligned} & - (l - \delta_l) (c_{lp} + e_{lp}d_{lp}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{np} + e_{np}d_{np}) W_l^n \zeta_{np} = \\ & = A\delta_p W_l^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{np} e_{np} W_l^n (\zeta_{np} - |n|); \quad l, p = -\infty \dots \infty \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$W_l^n = V_l^n - V_0^n P_l, \quad l \neq 0; \quad W_0^n = V_0^n - 2V_0^n R_0; \quad u^y = \cos \frac{\pi d^y}{b};$$

$$\zeta_{np} = |n| + i \frac{x}{k} \gamma_{np}; \quad x = \frac{b}{\lambda};$$

а  $V_l^n$ ,  $V_0^n$ ,  $R_0$  — коэффициенты работы [1], выражающиеся через полиномы Лежандра  $P_n(u^y)$ .

Для уравнений (10) получим бесконечную систему ( $l, p = -\infty \dots \infty$ )

$$-(l - \delta_l)(c_{lp} - \delta_l \delta_p B) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c'_{np} - \delta_n \delta_p B) \bar{W}_l^n \zeta_{np} =$$

$$= -B \delta_p \bar{W}_l^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{np} e_{np} \bar{W}_l^n (\zeta_{np} - |n|); \quad (15)$$

где  $\bar{W}_l^n(u^y) = (-1)^{n-l} W_l^n(-u^y)$ .

Для замыкания общей системы используем уравнения (11) и (12) из которых находим ( $l, p = -\infty \dots \infty$ ):

$$-(p - \delta_p) D_{lp} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{lm} \bar{W}_p^{1,0} \zeta'_{lm} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{lm} e_{lm} \bar{W}_p^{1,m} (\zeta'_{lm} - |m|); \quad (16)$$

$$-(p - \delta_p)(D'_{lp} + e_{lp} C'_{lp}) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (D'_{lm} + e_{lm} C'_{lm}) W_p^{1,m} \zeta'_{lm} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_{lm} e_{lm} W_p^{1,m} (\zeta'_{lm} - |m|), \quad (17)$$

где  $\zeta'_{lm} = |m| + i \frac{x}{k} \frac{a}{b} \gamma_{lm}$ , а коэффициенты  $W_p^{1,m}$  и  $\bar{W}_p^{1,m}$  получаются соответственно из  $W_l^n$  и  $\bar{W}_l^n$  при замене  $u^y$  на  $u^x = \cos \frac{\pi d^x}{a}$ .

Уравнения (14)—(17) вместе с соотношениями (5) образуют замкнутую квазирегулярную систему. Эта система содержит два вида параметров малости.  $\frac{\zeta'_{np}}{n}$  и  $\frac{\zeta'_{lm}}{m}$  характеризуют взаимодействие между различными гармониками поля, возбужденными на одной из решеток, а  $e_{np}$  и  $e_{lm}$  характеризуют взаимодействие дифракционных волн, возбужденных на разных решетках. При численных расчетах полученная бесконечная система уравнений заменяется на конечную в результате отбрасывания малых величин. При этом чем больше (по сравнению с  $\lambda$  и  $r$ ) периоды  $a$  и  $b$  решеток, тем большее количество членов приходится удерживать.

2. Произведем дополнительные преобразования уравнений (14)—(17). Рассмотрим равенства (14). Считая в этой незамкнутой системе величины, стоящие справа, известными, применим к ней формулу Крамера. В результате выразим  $(c_{np} - e_{np} d_{np})$  через  $d_{np}$  и  $A$ .

Аналогично преобразуем (15), (16), (17). При этом получим новую квазирегулярную систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} c_{lp} &= A\delta_p T_{l-0}^{1,p} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{np} R_{l-n}^{1,p} e_{np}, \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} c'_{lp} &= B\delta_p F_{l-0}^{1,p} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d'_{np} K_{l-n}^{1,p} e_{np}, \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_{lp} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{lm} K_{p-m}^{2,l} e_{lm}, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D'_{lp} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_{lm} R_{p-m}^{2,l} e_{lm}, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

содержащую только быстроубывающие параметры  $e_{np}$ ,  $e_{lm}$ .

Здесь

$$R_{l-n}^{i,p} = T_{l-n}^{i,p} - \delta_{l-n}; \quad F_{l-n}^{i,p} = \delta_{l-n} - K_{l-n}^{i,p}.$$

$T_{l-n}^{i,p}$  — решение системы уравнений

$$-(l - \delta_l) T_{l-n} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{k-n} W_l^k = W_l^n (\zeta_{np} - |n|), \quad (22)$$

а  $K_{l-n}^{i,p}$  — решение системы, отличающейся от (22) заменой  $W_l^k$  на  $\overline{W}_l^k$ . При некоторых условиях удобно решать систему (5), (18) — (21) вместо системы (5), (14) — (17).

Заметим еще, что если падающая волна поляризована в направлении  $Ox$  ( $A$  или  $B$  равно нулю), то неизвестные амплитуды будут удовлетворять соответственно равенствам

$$C_{n,m} = C_{-n,m} = C_{n,-m}; \quad C'_{nm} = -C'_{-n,m} = -C'_{n,-m}$$

(аналогично для  $d_{nm}$ ,  $d'_{nm}$ )

или

$$C_{n,m} = -C_{-n,m} = -C_{n,-m}; \quad C'_{n,m} = C'_{-n,m} = C'_{n,-m}.$$

Воспользовавшись этим, можем дополнительно преобразовать уравнения (18) — (21) так, что порядок системы сокращается вчетверо.

3. Для выяснения физического смысла коэффициентов (22) рассмотрим поведение поля на поверхности решеток ( $z=0$  и  $z=-r$ ). В установившемся режиме на первую решетку сверху набегают основная волна, а со стороны второй решетки — полный двумерный спектр дифракционных волн (с амплитудами  $d_{nm}$ ,  $d'_{nm}$ ). От решетки вниз также уходит полный спектр гармоник (амплитуды  $c_{nm}$ ,  $c'_{nm}$ ). Естественно, что амплитуда каждой из уходящих от решетки волн равна сумме амплитуд всех падающих волн, умноженных на соответствующие коэффициенты преобразования (волны с номером  $n, p$  в волну с номером  $l, \rho$ ). Аналогичные рассуждения — для волн приходящих и уходящих от второй решетки.

Таким образом, равенства (18) — (21) выражают связь между искомыми амплитудами и коэффициентами отражения, прохождения и преобразования при падении волн на одиночную решетку. При этом чем меньше расстояние  $r$  между решетками, тем большее количество приходящих волн вносит ощутимый вклад в каждую из уходящих, а значит, приходится в (18) — (21) учитывать большее количество членов.

В случае, когда взаимодействие между решетками происходит только на основной волне ( $\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda} < 1$ ;  $a$  достаточно велико), получим простое решение

$$\begin{aligned} c_{0,0} = -C_{0,0} &= A \frac{-T_{0-0}^{1,0}}{1 + R_{0-0}^{1,0} K_{0-0}^{2,0} (e_{0,0})^2}; & D_{0,0} = d_{0,0} &= c_{0,0} K_{0-0}^{2,0} e_{0,0} \\ c'_{0,0} = C'_{0,0} &= B \frac{F_{0-0}^{1,0}}{1 + R_{0-0}^{2,0} K_{0-0}^{1,0} (e_{0,0})^2}; & D'_{0,0} = -d'_{0,0} &= -c'_{0,0} R_{0-0}^{2,0} e_{0,0} \end{aligned} \quad (23)$$

Для  $c_{n,0}, c'_{n,0}, D_{0,m}, D'_{0,m}$  получаются аналогичные формулы. Остальные амплитуды в этом приближении равны нулю.

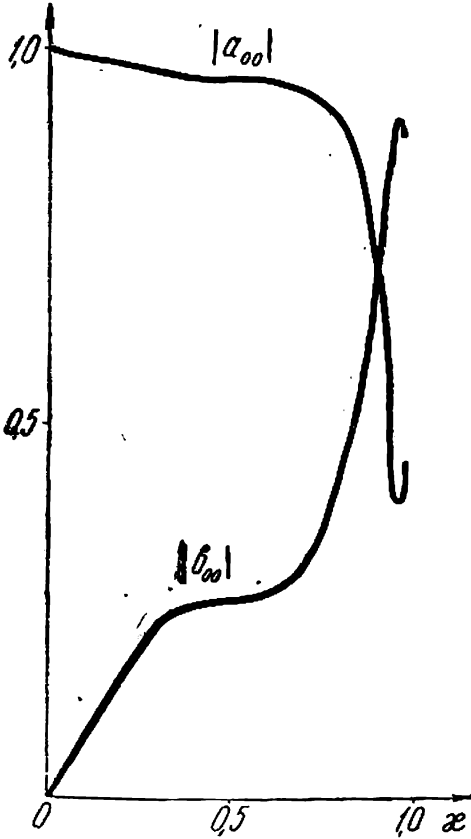


Рис. 2. Зависимость модулей коэффициента отражения  $|a_{00}|$  и коэффициента прохождения  $|b_{00}|$  от  $\frac{b}{\lambda}$  в случае падения  $E_x$ -поляризованной волны единичной амплитуды ( $A=1, R=0$ ) при  $U^x = U^y = 0, \frac{a}{b} = 1, \frac{r}{a} = 1$ . В данном частном случае эти кривые совпадают с кривыми для амплитуд  $a'_{00}, b'_{00}$ , относенных к  $B$ , в случае  $A=0, B=1$ .

Воспользовавшись соотношениями (6), по значениям амплитуд волн внутренней области ( $0 > z > -r$ ) определяем амплитуды  $b_n, b'_n$  прошедших и  $a_n, a'_n$  отраженных волн.

На рис. 2 представлены результаты, вычисленные с помощью формул (26), (6). Как и в случае обычных двойных решеток [4], в случае скрещенных проявляются резонансные явления, вызывающие «изрезанность» кривых.

Если решетки одинаковы ( $u^x = u^y; a = b$ ), то коэффициенты прохождения  $E_x$  и  $H_x$  — поляризованных волн совпадают в данном приближении (в общем случае — нет).

Существенное отличие рассмотренной в данной работе системы от приведенной в [4] заключается в том, что в дифракционном поле присутствуют обе поляризационные составляющие, даже если в падающем поле одна из них отсутствует ( $A$  или  $B$  равно нулю).

В случае малых  $r$  в (18) — (21) необходимо удерживать большее количество членов. Практически при этом можно получить решение для любых конечных  $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}$  и даже при  $\frac{a}{r}, \frac{b}{r} \gg 1$  [3].

В заключение отметим, что уравнения (18) — (21) связывают решение для двойной скрещенной системы с решением для любых типов входящих в нее одинарных

решеток. Так, если одну или обе решетки в системе рис. 1 заменить решетками специальной геометрической формы, рассмотренными в работе [5] и [6], то достаточно подставить в (18) — (21) вместо коэффициентов (22) коэффициенты преобразования, соответствующие данным решеткам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, 4, 1962.
2. Л. В. Конторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962, стр. 37.
3. М. И. Конторович, В. Ю. Петрунькин, Н. А. Есепкина, М. И. Астрахан. «Радиотехника и электроника», 7, 2, 1962.
4. О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 33, 10, 1962.
5. Л. Н. Литвиненко. «Известия вузов, Радиофизика», (в печати).
6. Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопапов. Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и Харьковск. матем. об-ва, 30, 4, 1964.