

ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

В. М. Скурлов

1. Плоская решетка из идеально проводящих бесконечно тонких и бесконечно длинных лент с периодом l и шириной щели d расположена в плоскости $z = 0$, являющейся границей раздела, так что оси лент параллельны оси x ($\epsilon_1 = \mu_1 = 1$ при $z > 0$ и $\epsilon_2 = \epsilon$, $\mu_2 = 1$ при $z < 0$). Дифракция плоской волны на подобной структуре исследована в работах [1] и [2]. В данной статье рассмотрим дифракцию цилиндрической электромагнитной волны на плоской решетке, расположенной на границе с полубесконечной диэлектрической средой. В этом случае источник электромагнитных волн представляет собой бесконечно тонкую нить с током I , параллельную оси x , положение которой определяется точкой (y_0, z_0) (рис. 1). Предполагается, что ток нити в плоскостях $x = \text{const}$ имеет одну и ту же фазу. Тогда поле зависит от координат y и z , а вектор электрического поля имеет только x -е компоненты.

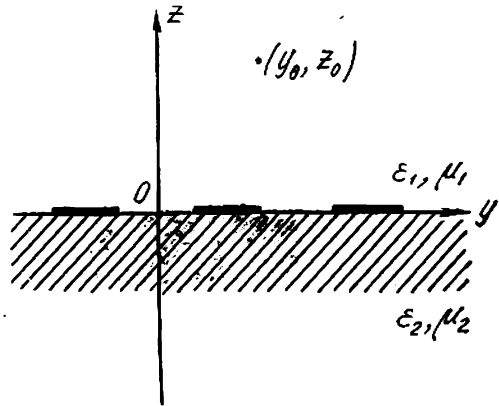


Рис. 1.

Естественно представить падающую цилиндрическую волну в виде суперпозиции плоских волн.

Поле в области $z > 0$ запишем в виде

$$E_x^1 = K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \tau^2} |z - z_0| + i\tau(y - y_0)}}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) e^{i\sqrt{k^2 - \tau_n^2} z} e^{i\tau_n y} d\tau, \quad (1)$$

где $K = -\frac{kl}{c}$, $k = \frac{\omega}{c}$, I — ток нити, $\tau_n = \tau + \frac{2\pi n}{l}$, временная зависимость берется в виде $e^{-i\omega t}$, мнимую часть корня здесь и далее считаем положительной.

Первое слагаемое является полем цилиндрической волны в свободном пространстве, представленным в виде суперпозиции плоских волн [4]. Каждая из этих плоских волн имеет постоянную распространения вдоль оси y , равную τ , аналогичную величине $k \sin \alpha$ в работе [2], которая здесь принимает все возможные значения. Второе слагаемое — дифракционное поле, являющееся суперпозицией дифракционных полей, обусловленных каждой из плоских волн с постоянными распространения вдоль

оси y , равными τ_n . Оно удовлетворяет волновому уравнению и учитывает периодичность структуры.

Из закона Снелля следует, что при переходе из одной среды в другую постоянная распространения плоской волны вдоль границы раздела не изменяется. Поэтому поле при $z < 0$ следует искать в виде

$$E_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{-i\sqrt{k^2 - \tau_n^2} z} e^{i\tau_n y} d\tau. \quad (2)$$

Интегрирование в (1) и (2) производится по вещественной оси τ . Подынтегральные функции имеют точки ветвления, которые определяются из условий

$$k^2 - \tau_n^2 = 0, \quad k^2 \varepsilon - \tau_n^2 = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти точки лежат на вещественной оси при $\text{Im} \varepsilon = 0$. Если считать, что $k = k_1 + ik_2$, где k_2 — малая величина, то точки ветвления будут лежать вне действительной оси. В дальнейшем всюду считаем $k_2 = 0$.

Разрезы соединяют точки ветвления, проходя через бесконечно удаленную точку и не пересекая действительной оси.

Граничные условия приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} B(\tau, y_0, z_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) e^{i\tau_n y} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{i\tau_n y} = \begin{cases} 0 & (\text{металл}); \\ \neq 0 & (\text{щель}); \end{cases} \\ -h_{10}(\tau) B(\tau, y_0, z_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\tau) h_{1n}(\tau) e^{i\tau_n y} &= \\ = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) h_{2n}(\tau) e^{i\tau_n y} & \quad (\text{щель}) \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\pi n}{l}, \quad h_{1n}(\tau) = \sqrt{k^2 - \tau_n^2}, \quad B(\tau, y_0, z_0) = K \frac{e^{ih_{10}z_0 - i\tau y_0}}{h_{10}} \\ h_{2n}(\tau) &= \sqrt{k^2 \varepsilon - \tau_n^2}. \end{aligned} \quad (3')$$

Система (3) преобразуется:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i\tau_n y} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h'_{1n} + h'_{2n}) b_n e^{i\tau_n y} &= 2h'_{10} B \quad (\text{щель}); \end{aligned} \quad (4)$$

здесь

$$\begin{aligned} h'_{1n} = h'_{1n}(\tau') &= \sqrt{\kappa^2 - (\tau'_n)^2}, \quad h'_{2n} = h'_{2n}(\tau') = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon - (\tau'_n)^2}; \\ \tau'_n &= \tau \frac{l}{2\pi} + n = \tau' + n; \quad \kappa = k \frac{l}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}. \end{aligned}$$

Для решения этой системы применим методику, аналогичную использованной в работе [3].

Так как $-\infty \leq \tau' \leq \infty$, то всегда можно представить τ' в виде $\tau' = q + \delta$, где

$$q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad -\frac{1}{2} < \delta \leq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Введем

$$q + n = s, \quad b_n = b_{s-q} = b_s^q, \quad b_s^q (s + \delta) = x_s^q, \\ h'_{1n}(\tau') = h'_{1s}(\delta) = \sqrt{x^2 - (s + \delta)^2}, \quad h'_{2n}(\tau') = h'_{2s}(\delta) = \sqrt{x^2 - (s + \delta)^2}, \\ B(\tau, y_0, z_0) = B^q(\delta, y_0, z_0). \quad (6)$$

В этих обозначениях (4) после умножения первого уравнения на $e^{i\tau y}$ и дифференцирования по y записывается так:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s^q e^{i\tau s y} = 0 \text{ (металл),} \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s^q \frac{|s + \delta|}{s + \delta} \left(\sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} + \sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} \right) e^{i\tau s y} = 2h'_{1q} B^q e^{i\tau q y} \text{ (щель).}$$

Учитывая, что $\frac{|s + \delta|}{s + \delta} = \frac{|s|}{s}$ при $s \neq 0$ и введя

$$\varphi = \frac{2\pi y}{l}, \quad r_s = 1 + \frac{i}{2} \left(\sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} + \sqrt{\frac{x^2}{(s + \delta)^2} - 1} \right) s \neq 0, \quad (7)$$

получим

$$\sum_{s \neq 0} x_s^q e^{i s \varphi} + b_0^q \delta = 0, \quad \theta < |\varphi| \leq \pi; \\ \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} e^{i s \varphi} = \frac{i}{2} (h'_{10} + h'_{20}) b_0^q - i h'_{1q} B^q e^{i q \varphi} + \\ + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s e^{i s \varphi}, \quad 0 < |\varphi| < \theta, \quad \theta = \frac{\pi d}{l}. \quad (8)$$

Система (8) решается методом сведения ее к задаче Римана — Гильберта [1]. Для коэффициентов b_0^q, x_s^q получаем бесконечную систему уравнений

$$-b_0^q = \left[\delta + \frac{i}{2} (h'_{10} + h'_{20}) \right] V_{|q|}^0 b_0^q - i h'_{1q} B^q V_{|q|}^0 + \\ + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s V_{|q|}^s + 2x_{-1}^q R_{|q|}; \quad (9) \\ \delta b_0^q = \left[\delta + \frac{i}{2} (h'_{10} + h'_{20}) \right] V_0^0 b_0^q - i h'_{1q} B^q V_0^q + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s V_0^s + 2x_{-1}^q R_0; \\ x_m^q = \left[\delta + \frac{i}{2} (h'_{10} + h'_{20}) \right] V_m^0 b_0^q - i h'_{1q} B^q V_m^q + \\ + \sum_{s \neq 0} x_s^q \frac{|s|}{s} r_s V_m^s + 2x_{-1}^q R_m, \quad m = +1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

где

$$V_{|q|}^s = \sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^m V_m^s}{m + \delta} = \frac{\pi}{2 \sin \delta \pi} \cdot \frac{\delta - 1}{s + \delta} (P_{\delta-1} P_{s+1} - P_{\delta-2} \cdot P_s) - \frac{V_0^s}{\delta}; \\ R_{|q|} = \sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^m R_m}{m + \delta} = \frac{\pi}{2 \sin \delta \pi} P_{\delta-1} - \frac{R_0}{\delta};$$

P_s — полиномы Лежандра аргумента $u = \cos \frac{\pi d}{l} = \cos \theta$;

P_δ — функции Лежандра того же аргумента;

V_m^s и R_m имеют тот же вид, что и в [1].

2. Рассмотрим систему (9) при $x^2 \ll 1$ (длинноволновое приближение). Она переходит в систему двух уравнений с двумя неизвестными b_0^q и x_{-1}^q при фиксированном q . После преобразований получаем решение этой системы

$$b_0^q(\delta) = \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} i h_{1q}' B^q, \quad b_{-1}^q(\delta) = \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} i h_{1q}' B^q, \quad (10)$$

где

$$D_0^q(\delta) = \frac{1-\delta}{q+\delta} (P_{\delta-2} P_q - P_{\delta-1} P_{q+1}) - \frac{P_{\delta-1}}{q} (u P_q - P_{q+1});$$

$$D_0^q(\delta) = P_\delta - P_{-\delta};$$

$$D_{-1}^q(\delta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{q\delta} (u P_q - P_{q+1}) (u P_{\delta-1} - P_{\delta-2}) \left[\delta + \frac{i}{2} (\sqrt{x^2 - \delta^2} + \sqrt{x^{2\varepsilon} - \delta^2}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{q+\delta} (P_{\delta-1} P_{q+1} - P_{\delta-2} P_q) \left[\delta (1+u) - \frac{i}{2} (1-u) (\sqrt{x^2 - \delta^2} + \sqrt{x^{2\varepsilon} - \delta^2}) \right] \right\};$$

$$D_{-1}^q(\delta) = (u P_{\delta-1} - P_{\delta-2});$$

$$G(\delta) = \delta (P_\delta + P_{-\delta}) + \frac{i}{2} (\sqrt{x^2 - \delta^2} + \sqrt{x^{2\varepsilon} - \delta^2}) (P_\delta - P_{-\delta}).$$

Теперь можно найти поле E_x^2 согласно (2). Введем для удобства $\frac{2\pi}{l} z = z'$, $\frac{2\pi}{l} z_0 = z'_0$, $\frac{2\pi}{l} y = y'$, $\frac{2\pi}{l} y_0 = y'_0$;

тогда

$$B^q = K \frac{\exp [i h_{1q}' z'_0 - i (q + \delta) y'_0]}{h_{1q}'}$$

Учитывая (5) и (6),

$$E_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{-i \sqrt{k^2 \varepsilon - \tau^2} z} e^{i \tau n y} d\tau = \frac{2\pi}{l} \sum_{q, s=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} b_s^q e^{-i \sqrt{x^2 \varepsilon - (s+\delta)^2} z' + i (s+\delta) y'} d\delta = \\ = \frac{2\pi}{l} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \{ b_0^q e^{-i \sqrt{x^2 \varepsilon - \delta^2} z' + i \delta y'} + b_{-1}^q e^{-i \sqrt{x^2 \varepsilon - (\delta-1)^2} z' + i \delta y' - i y'} \} d\delta. \quad (11)$$

Следовательно,

$$E_x^2(y'_0, z'_0, y', z') = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_0^q(y'_0, z'_0, y', z') + \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z'), \quad (12)$$

где

$$F_0^q(y'_0, z'_0, y', z') = iK \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i \sqrt{x^2 \varepsilon - \delta^2} z'_0 - i \sqrt{x^2 \varepsilon - \delta^2} z' + i \delta (y' - y'_0)} d\delta; \\ F_0^q(y'_0, z'_0, y', z') = \\ = iK e^{-i q y'_0 - q z'_0} \text{sign } q \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} e^{-i \sqrt{x^2 \varepsilon - \delta^2} z' + i \delta (y' - y'_0) - \delta z'_0} \text{sign } q d\delta; \\ F_{-1}^0(y'_0, z'_0, y', z') = \\ = iK e^{-i y'} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_{-1}^0(\delta)}{G(\delta)} e^{i \sqrt{x^2 - \delta^2} z'_0 - i \sqrt{x^2 \varepsilon - (\delta-1)^2} z' + i \delta (y' - y'_0)} d\delta;$$

$$F_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z') =$$

$$= iK e^{-iqy'_0 - iy' - qz'_0} \operatorname{sign} q \int_{-1/2}^{1/2} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} e^{-i\sqrt{x^2 \varepsilon - (\delta-1)^2} z' + i\delta(y' - y'_0) - \delta z'_0} \operatorname{sign} q d\delta,$$

$$\operatorname{sign} q = \begin{cases} 1, & q > 0; \\ -1, & q < 0. \end{cases}$$

Выясним, имеет ли нули функция $G(\delta)$. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$;

$$\sqrt{x^2(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) - \delta^2} = \begin{cases} M_1 + iM_2, & x^2\varepsilon_1 > \delta^2; \\ M_1 - iM_2, & x^2\varepsilon_1 < \delta^2, \end{cases}$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2\varepsilon_2)^2 + (x^2\varepsilon_1 - \delta^2)^2} + (x^2\varepsilon_1 - \delta^2)},$$

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2\varepsilon_2)^2 + (x^2\varepsilon_1 - \delta^2)^2} - (x^2\varepsilon_1 - \delta^2)}.$$

Будем считать, что $\varepsilon_1 > 1$. Возможны случаи $x^2\varepsilon_1 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ и $x^2\varepsilon_1 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$. В первом случае следует рассмотреть три интервала: $|\delta| \leq x$, $x < |\delta| \leq x\sqrt{\varepsilon_1}$ и $x\sqrt{\varepsilon_1} < |\delta| \leq \frac{1}{2}$, во втором случае — два интервала: $|\delta| \leq x$ и $x < |\delta| < \frac{1}{2}$.

При $|\delta| < x$ и $\delta \neq 0$ условие $G(\delta) = 0$ сводится к следующему:

$$\delta(P_+ + P_-) + \frac{i}{2}(\sqrt{x^2 - \delta^2} + M_1 + iM_2)(P_+ - P_-) = 0,$$

откуда следует

$$\begin{cases} \delta(P_+ + P_-) - \frac{1}{2}M_2(P_+ - P_-) = 0, \\ (\sqrt{x^2 - \delta^2} + M_1)(P_+ - P_-) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} P_+ + P_- = 0, \\ P_+ - P_- = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Последняя система не имеет смысла при $|\delta| \leq \frac{1}{2}$, следовательно, при $|\delta| \leq x$, $\delta \neq 0$ $G(\delta) \neq 0$. При $\delta = 0$ $\frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)}$ и $\frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)}$ стремятся к конечным пределам.

Такая же противоречивая система (13) получается в остальных случаях; таким образом, $G(\delta) \neq 0$ при $|\delta| \leq \frac{1}{2}$, $\delta \neq 0$.

Дифракционное поле получается в виде бесконечной суммы определенных интегралов. Так как подынтегральные функции ограничены, то каждый из этих интегралов есть ограниченная функция. Присутствие множителя $e^{-qz'_0 \operatorname{sign} q}$ обеспечивает быструю сходимость этой суммы при $z'_0 > 0$. Определенные интегралы, входящие в сумму, могут быть вычислены численными методами.

При $z'_0 = 0$ система уравнений для коэффициентов $b_n(\tau)$, получающаяся из граничных условий, дает тривиальное решение, даже если источник расположен в щели. Из физических соображений поле в этом

случае должно быть отличным от нуля, поэтому здесь необходимо специальное исследование.

3. Найдем поле при $z > 0$.

Из (3) следует

$$B(\tau) + a_0 = b_0, \\ a_n = b_n; \quad n \neq 0. \quad (14)$$

На основании (14), (1) и (3)

$$E_x^1 = K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{k^2-\tau^2}|z-z_0|+i\tau(y-y_0)}}{\sqrt{k^2-\tau^2}} d\tau - K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{k^2-\tau^2}(z+z_0)+i\tau(y-y_0)}}{\sqrt{k^2-\tau^2}} d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\tau) e^{i\sqrt{k^2-\tau^2}z+i\tau ny} d\tau = K\pi [H_0^{(1)}(kr_1) - H_0^{(1)}(kr_2)] + \\ + \frac{2\pi}{i} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-j_2}^{j_2} \{b_0^q(\delta) e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}z'+i\delta y} + b_{-1}^q(\delta) e^{i\sqrt{x^2-(\delta-1)^2}z'+i(\delta-1)y'}\} d\delta;$$

$$E_x^1(y'_0, z'_0, y', z') = K\pi [H_0^{(1)}(xr'_1) - H_0^{(1)}(xr'_2)] + \sum_{q=-\infty}^{\infty} N_0^q(y'_0, z'_0, y', z') + \\ + \sum_{q=-\infty}^{\infty} N_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z'), \quad (15)$$

где

$r'_1 = \sqrt{(y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2}$ — расстояние от источника до точки наблюдения,

$r'_2 = \sqrt{(y' - y'_0)^2 + (z' + z'_0)^2}$ — расстояние от изображения источника до точки наблюдения,

$$N_0^q(y'_0, z'_0, y', z') = iK \int_{-j_2}^{j_2} \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}(z'_0+z') + i\delta(y'-y'_0)} d\delta, \\ N_0^q(y'_0, z'_0, y', z') = \\ = iK e^{-iqy'_0 - qz'_0 \text{ sign } q} \int_{-j_2}^{j_2} \frac{D_0^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}z' + i\delta(y'-y'_0) - \delta z'_0 \text{ sign } q} d\delta, \\ N_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z') = iK e^{-iy'} \int_{-j_2}^{j_2} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-\delta^2}(z'_0+z') + i\delta(y'-y'_0)} d\delta, \quad (15') \\ N_{-1}^q(y'_0, z'_0, y', z') = \\ = iK e^{-iqy'_0 - iy' - qz'_0 \text{ sign } q} \int_{-j_2}^{j_2} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2-(\delta-1)^2}z' + i\delta(y'-y'_0) - \delta z'_0 \text{ sign } q} d\delta.$$

Поле при $z > 0$ оказывается суперпозицией полей от источника, от изображения источника и дифракционного поля, обусловленного наличием решетки.

4. Рассмотрим поле при $z < 0$ в случае $\epsilon \rightarrow 1$, $z'_0 \rightarrow \infty$. Тогда $G(\delta) = G_1(\delta) = \delta(P_\delta + P_{-\delta}) + i\sqrt{x^2 - \delta^2}(P_\delta - P_{-\delta})$;

$$F_0^0 = iK \int_{-i\delta_0}^{i\delta_0} \frac{D_0^0(\delta)}{G(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta;$$

$$F_0^q = iK e^{-iqy'_0 - qz'_0 \operatorname{sign} q} \int_{-i\delta_0}^{i\delta_0} \frac{D_0^q(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-i\sqrt{x^2 - \delta^2}z' + i\delta(y' - y'_0) - \delta z'_0 \operatorname{sign} q} d\delta,$$

$$F_{-1}^0 = iK e^{-iy'} \int_{-i\delta_0}^{i\delta_0} \frac{D_{-1}^0(\delta)}{G_1(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2}z'_0 - i\sqrt{x^2 - (\delta-1)^2}z' + i\delta(y' - y'_0)} d\delta,$$

$$F_{-1}^q = iK e^{-iqy'_0 - iy' - qz'_0 \operatorname{sign} q} \int_{-i\delta_0}^{i\delta_0} \frac{D_{-1}^q(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-i\sqrt{x^2 - (\delta-1)^2}z' + i\delta(y' - y'_0) - \delta z'_0 \operatorname{sign} q} d\delta.$$

Найдем F_0^0 при больших z'_0 . Запишем F_0^0 в виде суммы

$$F_0^0 = iK \left(\int_{-i\delta_0}^{-x} + \int_{-x}^x + \int_x^{i\delta_0} \right).$$

Для оценки второго интеграла при больших z'_0 используем метод стационарной фазы [5], первый и третий интегралы оцениваем методом Лапласа [5].

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{D_0^0(\delta)}{G_1(\delta)} e^{i\sqrt{x^2 - \delta^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta &\approx iK \frac{\sqrt{2\pi x}}{\sqrt{z'_0}} \frac{\ln \frac{1+u}{2} e^{ixz'_0} e^{-ixz'}}{1 + ix \ln \frac{1+u}{2}}; \\ \int_x^{i\delta_0} \frac{D_0^0(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-\sqrt{\delta^2 - x^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta &\approx 2a_0 e^{ix(y' - y'_0)} \left(\frac{1}{2xz'_0} \right)^2; \\ \int_{-i\delta_0}^{-x} \frac{D_0^0(\delta)}{G_1(\delta)} e^{-\sqrt{\delta^2 - x^2}(z'_0 - z') + i\delta(y' - y'_0)} d\delta &\approx 2a_0 e^{-ix(y' - y'_0)} \left(\frac{1}{2xz'_0} \right)^2; \end{aligned}$$

$a_0 = \text{const.}$

Здесь выписаны главные члены разложения интегралов по степеням $\frac{1}{z'_0}$ при больших z'_0 . Очевидно, что $|F_0^q| \ll \text{const} e^{-(|q| - \frac{1}{2})z'_0}$. Следовательно, при больших z'_0

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_0^q(y'_0, z'_0, z', y') \approx iK \frac{\sqrt{2\pi x}}{\sqrt{z'_0}} \frac{\ln \frac{1+u}{2} e^{ixz'_0} e^{-ixz'}}{1 + ix \ln \frac{1+u}{2}}, \quad (16)$$

Источник нужно удалять на бесконечность таким образом, чтобы поле в данной точке пространства не изменялось, поэтому амплитуду его

тока I необходимо увеличить при этом в $\sqrt{z_0'}$ раз. Если выбрать амплитуду тока в точке (z_0, y_0) из условия

$$-\frac{kl\sqrt{2\pi x}}{c x \sqrt{z_0'}} e^{ixz_0'} = 1, \text{ то при } z_0' \rightarrow \infty$$

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_0^q(y_0', z_0', y', z') \approx \frac{ix \ln \frac{1+u}{2}}{1 + ix \ln \frac{1+u}{2}} e^{-ixz'} = b_0 e^{-ikz}.$$

Это нулевая гармоника прошедшей волны при нормальном падении плоской волны единичной амплитуды на такую решетку, расположенную в свободном пространстве [1]. Аналогично можно показать, что $\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_0^q(y_0', z_0', y', z')$ при $z_0' \rightarrow \infty$ переходит в (-1) -ую гармонику прошедшей волны при нормальном падении, которая быстро затухает при удалении от плоскости решетки.

5. При $u \rightarrow -1$ ширина лент приближается к нулю, и периодическая плоскость раздела переходит в границу «свободное пространство — диэлектрик». Чтобы получить правильный предельный переход в этом случае, будем исходить из точного выражения для поля в области 2, которое запишем следующим образом:

$$E_x^2 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} b_s^q(\delta) e^{-i\sqrt{x^2 + (s+\delta)^2} z' + i(s+\delta) y'} d\delta. \quad (17)$$

Функции $b_s^q(\delta)$ необходимо найти из системы (9) при $u \rightarrow -1$. Заметим, что $V_m^n(-1) = 0, m \neq n; V_0^0(-1) = 1; V_0^{-1}(-1) = 1;$

$$V_{-1}^{-1} = 0; V_n^n = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} \mu_{n+1-p}(u) P_{p-n-1}(u) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \mu_{k+1}(u) P_k(u) + \mu_0 P_{-1} + \mu_1 P_0 \right]; \quad (18)$$

$$V_n^n(-1) = 1 \text{ при } n \geq 0.$$

Коэффициенты $\mu_k(u)$ определены в [1]. Легко проверить, что $V_{-1}^{-1} \left| \frac{n}{n} \right| = -V_{-1}^{-1} \left| \frac{n}{n} \right|_{-2}$, поэтому при любых s справедливо равенство

$$\frac{|s|}{s} r_s V_s^s(-1) = 1. \quad (19)$$

Кроме того, $R_m(u) = \frac{1}{2} P_m(u); P_m(-1) = (-1)^m, R_m = \frac{1}{2} (-1)^m$. Разделим первое уравнение системы (9) на $R_{[s]}$:

$$|R_{[s]}(u)|_{\substack{u \rightarrow -1 \\ s \neq 0}} \rightarrow \infty.$$

На основании приближенного соотношения [6]

$$P_s(u) \approx 1 + 2s \ln \frac{1+u}{2},$$

справедливого при $u \rightarrow -1$, можно показать, что

$$\lim_{u \rightarrow -1} \frac{P_{\delta-2}(u)}{P_{\delta-1}(u)} = -1;$$

следовательно,

$$\lim_{u \rightarrow -1} \frac{V_{[s]}^s(u)}{R_{[s]}(u)} = \begin{cases} 0, & s \neq -1; \\ 2 & s = -1. \end{cases}$$

С учетом всех этих соотношений система (9) упрощается:

$$\begin{aligned} -ih'_{-1} B^{-1} + x_{-1}^{-1} (1 - r_{-1}) &= 0, & q = -1; \\ x_{-1}^q (1 - r_{-1}) &= 0, & q \neq -1; \\ iH\delta_0^q - ih'_{1q} B^q V_0^q + x_{-1}^q (1 - r_{-1}) &= 0, \\ -ih'_{1q} B^q V_m^q + x_m^q r_m + (-1)^m x_{-1}^q &= x_m^q \quad m \neq 0; -1, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (h'_{10} + h'_{20}).$$

Система (20) легко решается:

$$\begin{aligned} x_{-1}^q &= \begin{cases} 0, & q \neq -1; \\ \frac{ih'_{-1,-1} B^{-1}}{1 - r_{-1}}, & q = -1; \end{cases} \\ b_0^q &= \frac{1}{iH} [ih'_{1q} B^q V_0^q - x_{-1}^q (1 - r_{-1})] = \begin{cases} 0, & q \neq 0; \\ \frac{h'_{10} B^0}{H}, & q = 0. \end{cases} \\ x_m^q &= \frac{1}{r_m - 1} [ih'_{1q} B^q V_m^q - (-1)^m x_{-1}^q] = \begin{cases} 0, & m \neq q; \\ \frac{ih'_{1q} B^q V_q^q}{r_q - 1}, & m = q. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользовавшись (7) и (18), получим

$$r_q - 1 = \frac{iH}{|q + \delta|}, \quad V_q^q \frac{|q + \delta|}{q + \delta} = 1,$$

и решение системы (20) можно записать так:

$$b_s^q = \begin{cases} 0, & s \neq q \\ \frac{h'_{1q} B^q}{H}, & s = q \end{cases} \text{ для любых } s \text{ и } q$$

Двойная сумма в (17) переходит в простую сумму. Подставляя найденные коэффициенты b_s^q в (17) и учитывая, что

$$h'_{1q} B^q = K e^{i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z'_0 - i(q+\delta)y_0},$$

приходим к следующему выражению для поля в области 2 при $u = -1$:

$$E_x^2 = K \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2 \exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z'_0 - i \sqrt{x^2 \varepsilon - (q+\delta)^2} z' + i(q+\delta)(y' - y'_0)] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 \varepsilon - (q+\delta)^2}}. \quad (22)$$

Это выражение является точным значением x -й составляющей вектора электрического поля внутри диэлектрического полупространства ($z < 0$) при падении на него цилиндрической волны.

Зная функции $b_s^q(\delta)$, нетрудно найти поле в области 1 при $u = -1$

$$E_x^1 = K\pi [H_0^{(1)}(xr_1') - H_0^{(1)}(xr_2')] + \\ + K \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2 \exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z_0' + i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z' + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} d\delta. \quad (23)$$

Если устремить ε к 1 в (22) и (23), то поля в областях 1 и 2 должны перейти в поле нити с током в свободном пространстве:

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2 \exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z_0' - i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z' + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 1} = \\ = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} (z_0' - z') + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [i \sqrt{x^2 - \zeta^2} (z_0' - z') + i \zeta (y' - y_0')] d\zeta}{\sqrt{x^2 - \zeta^2}} = \pi H_0^{(1)}(xr_1').$$

Аналогично

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2 \exp [i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z_0' + i \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} z' + i (q+\delta) (y' - y_0')] d\delta}{\sqrt{x^2 - (q+\delta)^2} + \sqrt{x^2 - (q+\delta)^2}} = \\ = \pi H_0^{(1)}(xr_2').$$

Таким образом, при $u \rightarrow -1$, $\varepsilon \rightarrow 1$ $E_x^2 \rightarrow K\pi H_0^{(1)}(kr_1)$,

$$E_x^1 \rightarrow K\pi H_0^{(1)}(kr_1).$$

6. Если щели решетки сужаются, то она переходит в металлический экран, что соответствует $u \rightarrow 1$. В этом случае

$$V_m^n(1) = 0 \text{ при } m \neq n, \quad V_0^n = V_n^{-1} = 0, \quad P_k(1) = 1; \\ \mu_{k+1}(1) = 0, \text{ поэтому } V_n^n(1) = 0; \\ P_\delta(1)|_{\delta \rightarrow 0} = 1; \quad V_{[\sigma]}^s(1) = 0; \quad R_{[\sigma]}(1) = \frac{\pi}{2 \sin \delta \pi} - \frac{1}{2\delta}.$$

Система (9) переходит в однородную систему

$$\begin{cases} -b_0^q = 2x_{-1}^q R_{[\sigma]}, \\ \delta b_0^q = x_{-1}^q, \\ x_m^q = x_{-1}^q, \quad m \neq -1; 0. \end{cases}$$

Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2R_{[\sigma]} \\ -\delta & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\delta R_{[\sigma]} = \frac{\delta \pi}{\sin \delta \pi} \neq 0,$$

то эта система имеет только нулевое решение.

Дифракционное поле в области 2 обращается в нуль, а поле над экраном состоит из двух слагаемых:

$$E_x^1 = K\pi [H_0^{(1)}(kr_1) - H_0^{(1)}(kr_2)]$$

что совпадает, с учетом временной зависимости, с выражением, полученным Гринбергом [7].

Данная методика позволяет сравнительно просто рассчитывать подобные структуры при $\alpha \leq 0,2$. Если для вычисления коэффициентов $b_n^{\pm}(\delta)$ брать систему более высокого порядка, чем второй, то диапазон α можно расширить до 1 и далее.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 326, 4, 1962.
2. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, 6, 1963.
3. Е. Н. Подольский. Зап. мех.-мат. ф-та ХГУ и ХМО, 30, 1964.
4. Ф. М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, ч. 1, ИЛ, М., 1960.
5. А. Эрдейм. Асимптотические разложения. Физматгиз, М., 1962.
6. M. G. Guey. Quarterly of Applied Mathematics, V. XI, Oct. 1953, p. 311—318.
7. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.