ОБОСНОВАНИЕ КОРОТКОВОЛНОВОЙ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ

Е. Н. Подольский

1. Постановка задачи.

В плоскости xoy расположена периодическая решетка, образованная бесконечно тонкими и идеально проводящими металлическими лентами, параллельными оси ox. Период решетки равен 2π, расстояние между соседними лентами — 2δ, так что ширина лент — $2(\pi - \delta)$. Начало координат находится в середине одной из щелей.

Сверху ($z > 0$) под произвольным углом к этой решетке падает плоская электромагнитная волна

$$\vec{E}^{\text{п}} = \vec{e}e^{ik(\vec{n}\vec{r})}; \quad \vec{H}^{\text{п}} = \vec{h}e^{ik(\vec{n}\vec{r})} \tag{1}$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и дальше опускаем). Единичный вектор

$$\vec{n} = \{\alpha, \beta, -\gamma\} \quad (\gamma > 0)$$

задает направление падающей волны, постоянные векторы $\vec{e}$ и $\vec{h}$ связаны между собой, как известно, равенствами

$$\vec{h} = [\vec{n}\vec{e}]; \quad \vec{e} = [\vec{h}\vec{n}].$$

Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

Пусть $\vec{E}(x, y, z)$, $\vec{H}(x, y, z)$ — искомое поле. Как было показано в работе [1], x-составляющие этого поля имеют следующий вид:

$$E_x(x, y, z) = e_x e^{ik\alpha x} v_e(y, z); \quad H_x(x, y, z) = h_x e^{ik\alpha x} v_h(y, z), \tag{2}$$

где

$$v_e(y, z) = e^{ik\beta y}\left[e^{-ik\gamma z} + \sum_{-\infty}^{\infty} e_n e^{ik\gamma_n |z|} e^{iny}\right], \tag{3}$$

$$v_h(y, z) = e^{ik\beta y}\left[e^{-ik\gamma z} + \frac{|z|}{z}\sum_{-\infty}^{\infty} h_n e^{ik\gamma_n |z|} e^{iny}\right], \tag{3'}$$

$$\gamma_n = \sqrt{1 - \alpha^2 - \left(\beta + \frac{n}{k}\right)^2}, \tag{4}$$

причем знак у корня выбирается так, что $\operatorname{Im}\gamma_n > 0$, а если $\operatorname{Im}\gamma_n = 0$, то $\operatorname{Re}\gamma_n \geqslant 0$ (см. формулы (2), (2'), (4) работы [1]).

Чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо неизвестные коэффициенты e_n, h_n подобрать так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$1+\sum_{-\infty}^{\infty} e_n e^{iny}=0 \qquad \delta<|y|\leqslant\pi, \tag{5}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e_n e^{iny}=0 \qquad |y|<\delta, \tag{5'}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h_n e^{iny}=0 \qquad |y|<\delta, \tag{6}$$

$$-\gamma+\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n h_n e^{iny}=0 \qquad \delta<|y|\leqslant\pi \tag{6'}$$

(см. формулы (6), (II), (12), (V) работы [1]).

При этом искомое поле выражается через компоненты E_x, H_x по таким формулам:

$$\begin{cases} \vec{E}=\dfrac{i\alpha}{k(1-\alpha^2)}\operatorname{grad}E_x+\dfrac{1}{1-\alpha^2}\vec{\Pi}-\dfrac{i}{k(1-\alpha^2)}\operatorname{rot}\vec{\Pi}^*,\\ \vec{H}=\dfrac{i}{k(1-\alpha^2)}\operatorname{rot}\vec{\Pi}+\dfrac{i\alpha}{k(1-\alpha^2)}\operatorname{grad}H_x+\dfrac{1}{1-\alpha^2}\vec{\Pi}^*, \end{cases} \tag{7}$$

где $\vec{\Pi}(\vec{\Pi}^*)$ — вектор, x-составляющая которого равна E_x (H_x), а остальные составляющие равны нулю.

Здесь мы подробно рассмотрим только уравнения (5), (5′), так как уравнения (6), (6′) исследуются совершенно аналогично.

В статье [1] с помощью метода, предложенного в работе [2], доказано, что система (5), (5′) эквивалентна бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_n=\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p\frac{|p|}{p}\varepsilon_p V_n^p+2x_{-1}R_n-i\gamma V_n^{m_0}\ (n\neq 0,\, n\neq -1),\\ \theta x_0=\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p\frac{|p|}{p}\varepsilon_p V_0^p+2x_{-1}R_0-i\gamma V_0^{m_0},\\ 0=\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p\frac{|p|}{p}\varepsilon_p V_{[\theta]}^p+2x_{-1}R_{[\theta]}+x_0-i\gamma V_{[\theta]}^{m_0}, \end{cases} \tag{8}$$

где коэффициенты V_n^p, R_n, $V_{[\theta]}^p$, $R_{[\theta]}$ выражаются через полиномы Лежандра и функции Лежандра первого рода (см. стр. 121, 122 работы [1]); неизвестные x_n связаны с исходными неизвестными e_n формулами

$$x_n=\frac{n+\theta}{k}e_{n-m_0}\ (n\neq 0,\ n\neq m_0);$$
$$x_{m_0}=\beta(e_0+1);$$
$$x_0=\frac{1}{k}e_{-m_0}$$

$\left(m_0\right.$ — ближайшее к $k\beta$ целое число, т. е. $k\beta=m_0+\theta$, $\left.-\frac{1}{2}\leqslant\theta<\frac{1}{2}\right)$, а величины ε_p при фиксированных k и α убывают при $|p|\to\infty$ как p^{-2}.

Для получения приближенного решения в работе [1] система (8) заменялась конечной, которая получается из нее, если при всех $|p|>N$

заменить коэффициенты ε_p нулями. Однако для обоснования такого приближения необходимо показать, что бесконечная система (8) имеет единственное решение. Кроме того, этот метод непригоден для больших k, так как в этом случае нужно было бы решать конечную систему очень высокого порядка.

В настоящей статье мы, во-первых, докажем, что система (8) действительно имеет единственное решение, и, во-вторых, найдем коротковолновую асимптотику решения (т. е. исследуем случай $k \to \infty$).

2. Существование и единственность решения

Для исследования системы (8) удобнее вернуться к исходным переменным e_n, после чего эта система примет такой вид:

$$e_n - \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_n^p e_p = b_n \quad (-\infty < n < \infty), \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} A_n^p = \dfrac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{(p+m_0)(n+m_0+\theta)} \varepsilon_{p+m_0} V_{n+m_0}^{p+m_0} (1-\delta_{-m_0}^p) + \varepsilon_0 \dfrac{V_{n+m_0}^0}{n+m_0+\theta} \delta_{-m_0}^p - \\ \qquad - \dfrac{(1-\theta) P_{n+m_0}}{n+m_0+\theta} \delta_{-m_0-1}^p \quad (n \neq -m_0,\ n \neq -m_0-1), \\ A_{-m_0}^p = -\dfrac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{p+m_0} \varepsilon_{p+m_0} V_{[\theta]}^{p+m_0} (1-\delta_{-m_0}^p) - \varepsilon_0 V_{[\theta]}^0 \delta_{-m_0}^p + \\ \qquad + 2(1-\theta) R_{[\theta]} \delta_{-m_0-1}^p, \\ A_{-m_0-1}^p = \dfrac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{(1-\theta)(p+m_0)} \varepsilon_{p+m_0} V_0^{p+m_0} (1-\delta_{-m_0}^p) + \dfrac{\varepsilon_0 V_0^0 - \theta}{1-\theta} \delta_{-m_0}^p, \\ b_n = k|\beta| \dfrac{V_{n+m_0}^{m_0}}{n+m_0+\theta} (n \neq -m_0,\ n \neq -m_0-1), \\ b_{-m_0} = -k|\beta| V_{[\theta]}^{m_0};\ b_{-m_0-1} = \dfrac{k|\beta|}{1-\theta} V_0^{m_0} \end{cases} \tag{10}$$

(здесь и в дальнейшем $\delta_m^n = 0$ при $m \neq n$, $\delta_n^n = 1$).

Из формул, выражающих величины V_n^p, $V_{[\theta]}^p$ через полиномы Лежандра $P_n(\cos\delta)$, и оценок

$$|P_n(\cos\delta)| < \frac{1}{\sqrt{|n|}\sin\delta}, \quad \varepsilon_n = O(n^{-2}) \ (|n| \to \infty) \tag{11}$$

вытекают следующие неравенства для матричных элементов A_n^p и правых частей b_n:

$$\begin{cases} |A_n^p| < \dfrac{C}{|p-n|(|n|^{\frac{1}{2}}+1)(|p|^{\frac{3}{2}}+1)} \quad (n \neq p,\ n \neq -m_0), \\ |A_{-m_0}^p| < \dfrac{C \ln(|p|+1)}{p^2+1}, \\ |A_n^n| < \dfrac{C}{n^2+1},\ |b_n| < \dfrac{C}{|n|^{\frac{3}{2}}+1}. \end{cases} \tag{12}$$

Из последних неравенств в свою очередь следует, что

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n^p|^2 < \infty$$

и, значит, матрица $\|A_n^p\|$ порождает в гильбертовом пространстве l^2 последовательностей $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ вполне непрерывный оператор.

Так как столбец правых частей системы (9) принадлежит l^2 то в силу альтернативы Фредгольма для доказательства существования решения системы, принадлежащего l^2, достаточно доказать, что соответствующая однородная система не имеет ненулевых решений в этом пространстве.

Используя формулы (10) и оценки (11), можно показать, что любое решение $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ однородной системы

$$y_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_n^p y_p, \tag{9'}$$

принадлежащее l^2, имеет такой вид:

$$y_n = A\frac{P_{n+m_0}(\cos\delta)}{n+m_0+\theta} + B\frac{P_{n+m_0+1}(\cos\delta)}{n+m_0+\theta} + O\left(|n|^{-\frac{5}{2}}\right), \tag{13}$$

где A и B — некоторые константы, зависящие от параметров задачи, но не зависящие от n.

Из этой формулы и равенства

$$\frac{\gamma_n}{|n+m_0+\theta|} = \frac{i}{k} + O(n^{-2}),$$

вытекающего из формулы (4) и определения числа m_0, следует также, что

$$\frac{|n+m_0|}{n+m_0}\gamma_n y_n = \frac{Ai}{k}P_{n+m_0}(\cos\delta) + \frac{Bi}{k}P_{n+m_0+1}(\cos\delta) + O\left(|n|^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{14}$$

Поэтому функция

$$f_1(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} y_n e^{iny} \quad (-\pi \leqslant y \leqslant \pi) \tag{15}$$

является непрерывной функцией с абсолютно интегрируемой производной, а функция

$$f_2(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n y_n e^{iny} \quad (-\pi \leqslant y \leqslant \pi) \tag{16}$$

— абсолютно интегрируемой. Для доказательства последних утверждений нужно воспользоваться формулами (13) и (14) и известным разложением

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P_n(\cos\delta)e^{iny} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{y}{2}}}{\sqrt{\cos y - \cos\delta}} & |y| < \delta \\ 0 & \delta < |y| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Следовательно, к рядам (15) и (16) применимо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_1(y)}\, f_2(y)\, dy = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |y_n|^2.$$

С другой стороны, так как система (9) эквивалентна системе (5), (5'), то решение $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ соответствующей однородной системы (9') должно удовлетворять следующим равенствам:

$$f_1(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} y_n e^{iny} = 0, \quad \delta < |y| \leqslant \pi \tag{17}$$

$$f_2(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n y_n e^{iny} = 0, \qquad |y| < \delta$$

из которых следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f_1(y)}\,f_2(y)\,dy=0,$$

а, значит, и

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_n|y_n|^2=0.$$

Определяя вещественную и мнимую части в этом равенстве, имеем

$$\sum_{\operatorname{Im}\gamma_n>0}\operatorname{Im}\gamma_n|y_n|^2=0,$$

$$\sum_{\operatorname{Im}\gamma_n=0}\operatorname{Re}\gamma_n|y_n|^2=0.$$

Отсюда, учитывая правило выбора знака в формуле (4), определяющей γ_n, получим, что $y_n=0$ для всех n, при которых $\gamma_n\neq 0$.

Величина γ_n может обратиться в нуль максимум при двух значениях n; обозначим эти значения через m^+ и m^-. Тогда

$$f_1(y)=y_{m^+}e^{im^+y}+y_{m^-}e^{im^-y},$$

и из равенства (17) следует, что $y_{m^+}=y_{m^-}=0$.

Таким образом, однородная система (9′) не имеет ненулевого решения в пространстве l^2.

Поэтому неоднородная система (9) при всех вещественных k имеет единственное решение, принадлежащее l^2, причем из оценок (12) и теорем Коха следует, что это решение может быть получено в виде отношений сходящихся бесконечных определителей Крамера.

Тем самым доказаны существование решения, его единственность и законность приближенного метода, использованного в работе [1].

3. Коротковолновая асимптотика решения

Пусть $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ — решение неоднородной системы (9), принадлежащее l^2. Из формул (10), оценок (11) и вида правых частей уравнений (9) следует, что для этого решения тоже справедливо представление (13) и формула (14), т. е.

$$e_n=A'\frac{P_{n+m_0}}{n+m_0+\theta}+B'\frac{P_{n+m_0+1}}{n+m_0+\theta}+O\left(|n|^{-\frac{5}{2}}\right), \tag{18}$$

$$\frac{|n+m_0|}{n+m}\gamma_n e_n=\frac{A'i}{k}P_{n+m_0}+\frac{B'i}{k}P_{n+m_0+1}+O\left(|n|^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{19}$$

Положим

$$a_n=\frac{\sin n(\delta-\varepsilon^+-\varepsilon^-)}{\pi n}\,\frac{\sin n\varepsilon^+}{n\varepsilon^+}\cdot\frac{\sin n\varepsilon^-}{n\varepsilon^-}-\delta_n^0, \tag{20}$$

$$\eta_n=e_n-a_n,$$

где величины

$$\varepsilon^+=\frac{\pi}{k(\sqrt{1-\alpha^2}-\beta)};\quad \varepsilon^-=\frac{\pi}{k(\sqrt{1-\alpha^2}+\beta)} \tag{21}$$

выбраны, так, что произведение $\sin n\varepsilon^+\,\sin n\varepsilon^-$ обращается в нуль в тех точках, в которых обращается в нуль γ_n.

Коэффициенты a_n являются коэффициентами Фурье непрерывной функции, равной -1 в интервалах $\delta < |y| \leqslant \pi$ и нулю в интервале $|y| < \delta - 2\varepsilon^+ - 2\varepsilon^-$.

Так как коэффициенты e_n удовлетворяют равенствам (5), (5′), то

$$\varphi_1(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \eta_n e^{iny} = 0, \quad \delta < |y| \leqslant \pi \tag{22}$$

$$\varphi_2(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n \eta_n e^{iny} = -\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n e^{iny} \quad |y| < \delta, \tag{22'}$$

причем из формул (18), (19) и (20) следует, что функция $\varphi_1(y)$ является непрерывной функцией с абсолютно интегрируемой производной, а функция $\varphi_2(y)$ абсолютно интегрируема на всем интервале $[-\pi, \pi]$. Поэтому к этим функциям применимо равенство Парсеваля:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)}\, \varphi_2(y)\, dy.$$

Введем функцию

$$\varphi_3(y) = \gamma \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{iny},$$

где

$$d_n = \frac{\sin n(\delta + \varepsilon^+ + \varepsilon^-)}{\pi n} \cdot \frac{\sin n\varepsilon^+}{n\varepsilon^+} \frac{\sin n\varepsilon^-}{n\varepsilon^-} - \delta_n^0,$$

равную нулю в интервале $|y| < \delta$. Так как функция $\varphi_1(y)$ равна нулю вне этого интервала, то, учитывая равенство (22′), имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)}\, \varphi_2(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)}\, [\varphi_3(y) + \varphi_2(y)]\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)}\, [\varphi_3(y) - \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n e^{iny}]\, dy = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_n}\, (\gamma d_n - \gamma_n a_n)$$

и, следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_n}\, (\gamma d_n - \gamma_n a_n). \tag{23}$$

Так как величины γ_n $(-\infty < n < \infty)$ могут быть либо неотрицательными (их конечное число), либо чисто мнимыми с положительной мнимой частью, то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| \cdot |\eta_n|^2 \leqslant 2 \left| \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 \right|.$$

Используя неравенство Буняковского и формулу (23), получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|\, |\eta_n|^2 \leqslant 2 \sqrt{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|\, |\eta_n|^2 \right) \cdot \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} \right)},$$

откуда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|\, |\eta_n|^2 \leqslant 4 \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|}.$$

Для оценки правой части этого неравенства (при больших k) разобьем ее на три слагаемых:

$$|n| < N_1;\ N_1 \leqslant |n| \leqslant N_2;\ |n| > N_2,$$

где

$$N_1 = \frac{1}{2} k (\sqrt{1-\alpha^2} - |\beta|);\ N_2 = 3k,$$

и воспользуемся легко проверяемыми неравенствами:

$$|\gamma_n| > \frac{1}{2}\gamma;\ \left|1 - \frac{\gamma_n}{\gamma}\right| < \frac{3|n|}{k\gamma^2} \quad \text{при } |n| < N_1,$$

$$|\gamma_n| < 4;\left|\frac{\sqrt{\sin n\varepsilon^+ \sin n\varepsilon^-}}{\gamma_n}\right| \leqslant \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{при } N_1 \leqslant |n| \leqslant N_2,$$

$$1 < \frac{|\gamma_n|}{\gamma} < \frac{|n|}{k\gamma} \quad \text{при } |n| > N_2.$$

Имеем

$$\sum_{|n|<N_1} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} \leqslant 4\gamma \sum_{|n|<N_1} \left|\frac{\sin n(\delta+\varepsilon^+ + \varepsilon^-) - \sin n(\delta - \varepsilon^+ - \varepsilon^-)}{\pi n}\right|^2 +$$
$$+ 4\gamma \sum_{|n|<N_1} \frac{1}{\pi^2 n^2}\left|1 - \frac{\gamma_n}{\gamma}\right|^2 < \frac{16\gamma}{\pi^2} \sum_{|n|<N_1} \left|\frac{\sin n(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)}{n}\right|^2 +$$
$$+ \frac{36 : 2N_1}{k^2\gamma^3\pi^2} < \frac{C_1}{k\gamma\sqrt{1-\alpha^2}};$$

$$\sum_{N_1<|n|<N_2} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} \leqslant \frac{\gamma^2}{\pi^2} \sum_{N_1 \leqslant |n| \leqslant N_2} \left|\sqrt{\frac{\sin n\varepsilon^+ \sin n\varepsilon^-}{n\varepsilon^+ \cdot n\varepsilon^-}}\right| \frac{1}{n^2\gamma_n} +$$
$$+ 4 \sum_{N_1 \leqslant |n| \leqslant N_2} \frac{1}{\pi^2 n^2} < \frac{C_2}{k\gamma^2 (1-\alpha^2)^{\frac{3}{4}}};$$

$$\sum_{|n|N>_2} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} < 2\gamma \sum_{|n|>N_2} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{k} \sum_{|n|>N_2} \frac{|n|}{\pi^2 n^2 n^2 \varepsilon^+ \varepsilon^-} < \frac{C_3}{k\sqrt{1-\alpha^2}}$$

(все константы C_m не зависят от параметров задачи).

Таким образом, мы получили оценку

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\gamma_n}{\gamma}\right| |\eta_n|^2 < \frac{C_4}{k\gamma^3 (1-\alpha^2)^{\frac{3}{4}}}. \tag{24}$$

Из этого неравенства и формулы (4) следует для каждого фиксированного n при $k \to \infty$ оценка $\eta_n = O(k^{-\frac{1}{2}})$, откуда, учитывая формулы (20) и (21), получим

$$e_n = \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^0 + O(k^{-\frac{1}{2}}).$$

Заметим, что эти оценки неравномерны по n. Равномерные оценки можно получить следующим образом. Величина γ_n как функция переменной n обращается в нуль в двух точках: $k(\sqrt{1-\alpha^2} - \beta)$ и $-k(\sqrt{1-\alpha^2} + \beta)$. Выделим целую часть этих чисел:

$$k(\sqrt{1-\alpha^2} - \beta) = m^+ + \theta^+;\ -k(\sqrt{1-\alpha^2} + \beta) =$$
$$= m^- + \theta^- \left(-\frac{1}{2} \leqslant \theta^\pm < \frac{1}{2}\right).$$

Тогда, как легко проверить, при всех n, отличных от m^+ и m^-,

$$\left|\frac{\gamma_n}{\gamma}\right| > \frac{C_5}{\sqrt{k}\,\gamma\sqrt[4]{1-\alpha^2}},$$

откуда согласно (24) получим

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq m^+,\ n \neq m^-)}}^{\infty} |\eta_n|^2 < \frac{C_6}{\sqrt{k}\,\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Для оценки $|\eta_{m^+}|^2 + |\eta_{m^-}|^2$ введем функцию $\tau^+(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \overset{+}{\tau}_n e^{iny}$, которая равна e^{im^+y} в интервалах $\delta < |y| \leqslant \pi$ и нулю—в интервале $|y| < \delta$. Ее коэффициенты Фурье $\overset{+}{\tau}_{m^+}$ и $\overset{+}{\tau}_{m^-}$ равны

$$\overset{+}{\tau}_{m^+} = \frac{\pi-\delta}{\pi};\ \overset{+}{\tau}_{m^-} = -\frac{\sin(m^+-m^-)\delta}{\pi(m^+-m^-)} = O(k^{-1}).$$

Согласно равенству Парсеваля,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\overset{+}{\tau}_n|^2 = \frac{\pi-\delta}{\pi}.$$

Кроме того, из определения функции $\tau^+(y)$ и формулы (22) следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\tau^+(y)}\,\varphi_1(y)\,dy = 0.$$

С другой стороны, по равенству Парсеваля этот интеграл равен $\sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\overset{+}{\tau}_n}\eta_n$. Поэтому

$$|\overline{\overset{+}{\tau}_{m^+}}\eta_{m^+} + \overline{\overset{+}{\tau}_{m^-}}\eta_{m^-}| = |\sum_{\substack{n\neq m^+ \\ n\neq m^-}} \overline{\overset{+}{\tau}_n}\eta_n| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\overset{+}{\tau}_n|^2\right)\left(\sum_{\substack{n\neq m^+ \\ n\neq m^-}} |\eta_n|^2\right)} < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k}\,\gamma\sqrt[4]{1-\alpha^2}}, \tag{25}$$

Аналогично, вводя функцию $\tau^-(y)$, равную e^{im^-y} в интервалах $\delta < |y| \leqslant \pi$ и нулю — в интервале $|y| < \delta$, получим

$$|\overline{\overset{-}{\tau}_{m^+}}\eta_{m^+} + \overline{\overset{-}{\tau}_{m^-}}\eta_{m^-}| < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k}\,\gamma\sqrt[4]{1-\alpha^2}}, \tag{26}$$

где

$$\overset{-}{\tau}_{m^+} = O(k^{-1}),\ \overset{-}{\tau}_{m^-} = \frac{\pi-\delta}{\pi}.$$

Из неравенств (25) и (26) следует

$$|\eta_{m^+}| < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k}\,\gamma\sqrt[4]{1-\alpha^2}};\ |\eta_{m^-}| < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k}\,\gamma\sqrt[4]{1-\alpha^2}}.$$

Окончательно получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\eta_n|^2 < \frac{C_8}{\sqrt{k}\,\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{27}$$

так что равномерно по n имеет место неравенство

$$|\eta_n| < \frac{C_9}{\sqrt[4]{k}\,\gamma\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}}.$$

Нетрудно показать также, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left[a_n - \left(\frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^*\right)\right]^2 < \frac{C_{10}}{k}.$$

Таким образом, мы доказали, что при $k \to \infty$ равномерно по n имеют место оценки

$$e_n = a_n + O(k^{-\frac{1}{4}}),$$

$$e_n = \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* + O(k^{-\frac{1}{4}}).$$

4. Приближенные выражения для поля при больших k и оценки погрешности

В предыдущем пункте мы показали, что при больших k коэффициенты e_n можно приближенно заменить на a_n, определяемые формулой (20), и функцию $v\,(y,\ z)$ — на функцию

$$v^a\,(y,\ z) = e^{ik\beta y}\left[e^{-ik\gamma z} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{ik\gamma_n |z|} e^{iny}\right].$$

Построенное с помощью этой функции по формулам (2) и (7)* поле $\vec{E}^a, \vec{H}^a$ будет приближенным решением поставленной задачи дифракции.

Мы не можем ожидать, что это приближенное решение будет равномерно во всем пространстве приближаться к точному решению $\vec{E}^T$, $\vec{H}^T$, при $k \to \infty$. Поэтому в качестве меры погрешности приближенного решения выберем две интегральные энергетические величины: 1) энергию $W(\varepsilon,\ \zeta)$ разности точного и приближенного полей в параллелепипеде, ограниченном плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $y = \pi$, $y = -\pi$, $z = \varepsilon$, $z = \zeta$ ($\zeta > \varepsilon \geqslant 0$), отнесенную к плотности энергии падающей волны (1); 2) поток энергии $S(\zeta)$ этой разности полей через участок плоскости $z = \zeta$ ($\zeta > 0$), ограниченный плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $y = \pi$, $y = -\pi$, который отнесен к потоку энергии падающей волны через ту же площадку.

Вычисляя определенные таким образом величины, получим следующие выражения:

$$W^{Ta}(\varepsilon,\ \zeta) = 2\pi(\zeta - \varepsilon)\sum_{\mathrm{Im}\gamma_n = 0}|\eta_n|^2 +$$

$$+ \pi \sum_{\mathrm{Im}\gamma_n > 0}\left[|\gamma_n|\frac{1+\alpha^2}{k(1-\alpha^2)} + \frac{1}{k|\gamma_n|}\right]|\eta_n|^2\left(e^{-2k|\gamma_n|\varepsilon} - e^{-2k|\gamma_n|\zeta}\right);$$

$$S^{Ta}(\zeta) = \sum_{\mathrm{Im}\gamma_n = 0}\left|\frac{\gamma_n}{\gamma}\right||\eta_n|^2.$$

---

* Для простоты будем считать падающую волну E поляризованной, т. е. $h_x = 0$. Тогда и $H_x = 0$. Общий случай рассматривается вполне аналогично.

Используя полученные оценки (24), (27), получим следующие оценки погрешности приближенного решения:

$$W^{Ta}(0,\ \zeta) < \frac{C_{11}(\zeta+1)}{\sqrt{k}\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}};\quad S^{Ta}(\zeta) < \frac{C_{12}}{k\gamma^3(1-\alpha^2)^{\frac{3}{4}}}. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь в качестве $v_e(y,\ z)$ функцию

$$v^K(y,\ z) = e^{ik\beta y}\left[e^{-ik\gamma z} + \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^{\bullet}\right)e^{ik\gamma_n|z|}e^{iny}\right]. \tag{29}$$

Легко видеть, что функция $v^K(y,\ z)$ соответствует решению задачи по методу Кирхгофа — Зоммерфельда, когда величина $E_x(x,\ y,\ z)$ полагается в щелях равной x-составляющей вектора $\vec{E}$ падающей волны (и, естественно, на решетке равной нулю).

Оценивая разность между $\vec{E}^a$, $\vec{H}^a$ и кирхгофовским приближением $\vec{E}^K$, $\vec{H}^K$, определяемым функцией $v^K(y,\ z)$, получим

$$W^{aK}(\varepsilon,\ \zeta) < \frac{C_{13}(\zeta+1)}{k\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{C_{14}|\ln\varepsilon|}{k^2(1-\alpha^2)};$$

$$S^{aK}(\zeta) < \frac{C_{15}}{k\gamma^3(1-\alpha^2)^{\frac{3}{4}}},$$

откуда, используя оценки (28), получим оценку погрешности кирхгофовского приближения:

$$\left\{\begin{aligned} &W^{TK}(\varepsilon,\ \zeta) < \frac{C_{16}(\zeta+1)}{\sqrt{k}\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{C_{14}|\ln\varepsilon|}{k^2(1-\alpha^2)};\\ &S^{TK}(\zeta) < \frac{C_{17}}{k\gamma^3(1-\alpha^2)^{\frac{3}{4}}}. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Сделаем, наконец, еще один огрубляющий шаг: разложим в выражении (29) γ_n по степеням $\frac{1}{k}$ и ограничимся двумя первыми членами разложения. Тогда получим в качестве приближения для $v_e(y,\ z)$ функцию

$$v^{\Gamma}(y,\ z) = e^{ik\beta y}\left[e^{-ik\gamma z} + e^{ik\gamma|z|}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^{\bullet}\right)e^{in\left(y-\frac{\beta}{\gamma}|z|\right)}\right].$$

Эта функция определяет приближение геометрической оптики. Она имеет разрывы вдоль определенных лучей, исходящих из ребер решетки (параллельных направлению распространения падающей волны в нижней полуплоскости и параллельных направлению распространения отраженной от всей оси oy волны в верхней полуплоскости).

Если с помощью функции $v^{\Gamma}(y,\ z)$ вычислить по формулам (2), (7) соответствующее электромагнитное поле $\vec{E}^{\Gamma}, \vec{H}^{\Gamma}$ во всех точках, не лежащих на плоскостях разрывов, то аналогично предыдущему можно показать, что для погрешностей $W^{T\Gamma}(0, \zeta)$ и $S^{T\Gamma}(\zeta)$ справедливы оценки

$$\begin{cases} W^{T\Gamma}(0, \zeta) < \dfrac{C_{18}(\zeta^{\frac{3}{2}} + 1)}{\sqrt{k}\gamma^2 \sqrt{1-\alpha^2}}; \\ S^{T\Gamma}(\zeta) < \dfrac{C_{19}\zeta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k}\gamma^2 \sqrt{1-\alpha^2}} + \dfrac{C_{20}}{k\gamma^2 (1-\alpha^2)^{\frac{3}{4}}}. \end{cases} \qquad (31)$$

Таким образом, формулы (30) и (31) дают строгое обоснование приближений Кирхгофа — Зоммерфельда и геометрической оптики с оценкой погрешности при $k \to \infty$ в выбранных нами энергетических метриках.

Автор статьи выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Подольский. Дифракция электромагнитной волны, падающей под произвольным углом на плоскую металлическую решетку. «Уч. зап. мех.-матем. ф-та и Харьковского матем. об-ва», сер. 4, 30 (1964).

2. З. С. Агранович, В. А. Марченко и В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4 (1962).